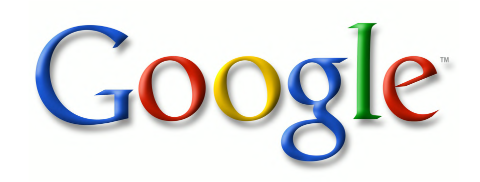
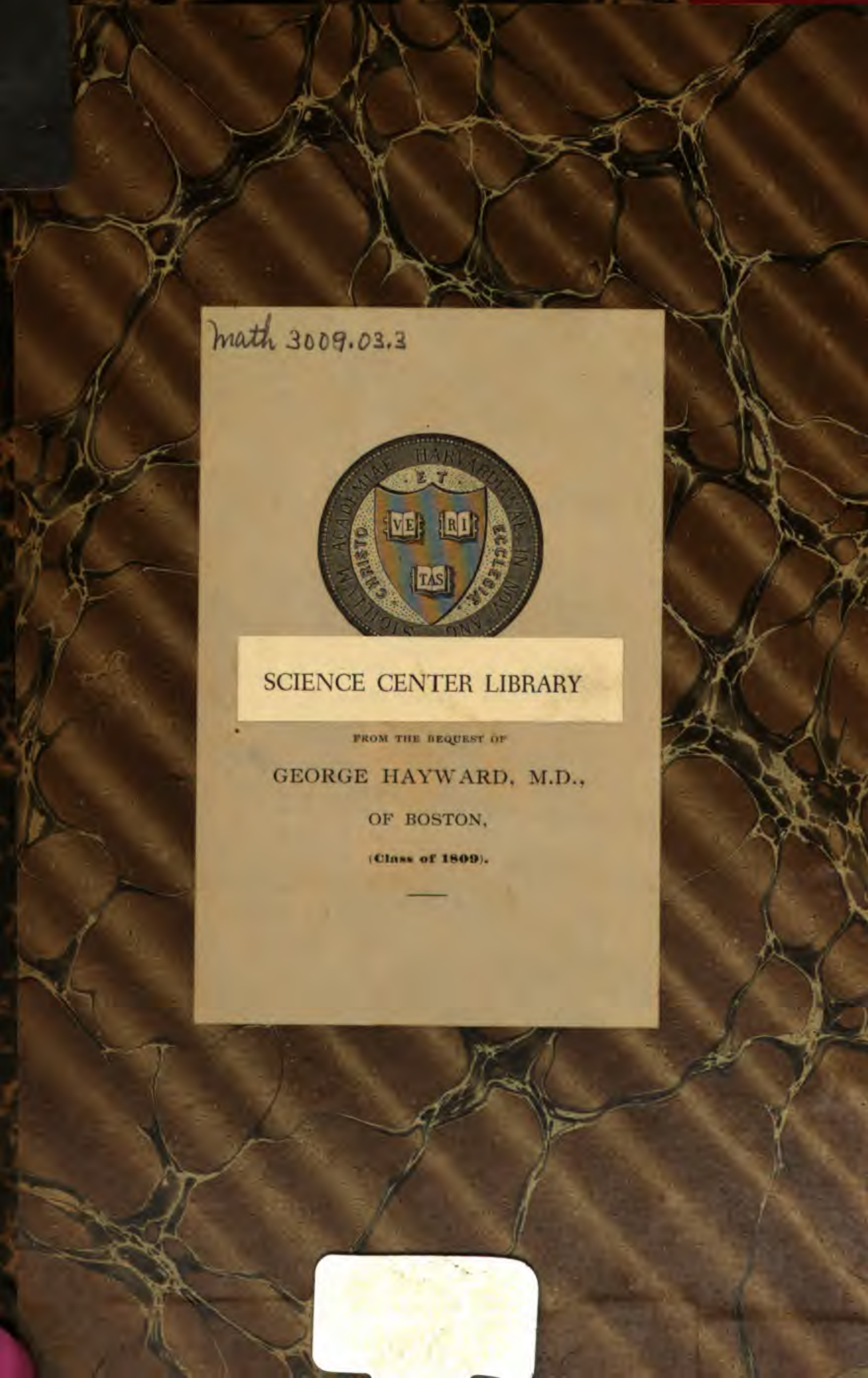




CHRISTO ET ECCLESIAE SIGILLUM ACADEMIAE HARVARDIANAE IN NOV ANG
VE RI TAS





COURS
D'ANALYSE

PROFESSÉ A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,

PAR

G. HUMBERT,

MEMBRE DE L'INSTITUT,
PROFESSEUR A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE.

TOME I.

CALCUL DIFFÉRENTIEL. — PRINCIPES DU CALCUL INTÉGRAL.
APPLICATIONS GÉOMÉTRIQUES.



PARIS,
GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE
DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE.
Quai des Grands-Augustins, 55.

1903

COURS

D'ANALYSE.

PARIS. — IMPRIMERIE GAUTHIER-VILLARS,
31198 Quai des Grands-Augustins, 55.

COURS
D'ANALYSE

PROFESSÉ A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,

PAR

G. HUMBERT,

MEMBRE DE L'INSTITUT,

PROFESSEUR A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE.

TOME I.

CALCUL DIFFÉRENTIEL. — PRINCIPES DU CALCUL INTÉGRAL.

APPLICATIONS GÉOMÉTRIQUES.



PARIS,

GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE

DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,

Quai des Grands-Augustins, 55.

1903

PRÉFACE.

Ce Cours s'adresse à des débutants, mais familiarisés déjà avec l'enseignement reçu dans les classes de Mathématiques spéciales : nous avons donc jugé inutile de revenir sur cet enseignement, et nous supposons connus du lecteur les principes fondamentaux des théories des séries, des logarithmes, des dérivées, des quantités imaginaires et de la Géométrie analytique.

Nous avons suivi à peu près exactement l'ordre fixé par le programme actuel des études à l'École Polytechnique ; c'est ainsi que l'on trouvera dans ce livre, après l'exposé de la notation différentielle, un assez long Chapitre consacré à la Géométrie infinitésimale, et, en particulier, à la courbure, aux développées successives, au cercle osculateur d'une courbe plane : il a semblé en effet avantageux, au risque de briser l'unité du Cours, d'illustrer de suite, par des exemples concrets, les notions relatives aux infiniment petits. Afin d'atténuer l'inconvénient de ce morcellement de théories abordées plus tard, on a donné, autant que possible, à la Géométrie le pas sur l'Analyse : le Chapitre d'ailleurs pourrait, sans trop de dommage, être laissé de côté à une première lecture ; on en dira autant de l'Introduction, où sont exposées les propriétés générales des fonctions continues.

Plusieurs questions, notamment dans les théories du contact et des enveloppes de surfaces, ont été traitées par les méthodes et

avec les notations même qu'emploie M. Jordan dans ses Cours autographiés ou imprimés : l'exposition n'a pu que gagner à ces emprunts; ils étaient d'autant plus inévitables que l'auteur, élève de M. Jordan, a reçu l'empreinte profonde de l'enseignement de ce maître.

Nous devons enfin remercier M. Painlevé des précieuses indications qu'il nous a données pour la rédaction des paragraphes du début, consacrés aux fonctions continues; c'est également à l'éminent analyste qu'appartient la méthode si simple que nous suivons pour établir l'existence et les propriétés fondamentales de l'intégrale définie.

Paris, octobre 1902.

TABLE DES MATIÈRES.

PREMIÈRE PARTIE.

CALCUL DIFFÉRENTIEL.

CHAPITRE I.

GÉNÉRALITÉS; DIFFÉRENTIELLES.

CHAPITRE II.

PREMIERS EXEMPLES GÉOMÉTRIQUES D'INFINIMENT PETITS.

CHAPITRE III.

CHANGEMENTS DE VARIABLES.

CHAPITRE IV.

FORMATION DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES.

CHAPITRE V.

SÉRIES.

CHAPITRE VI.

FONCTIONS D'UNE VARIABLE IMAGINAIRE.

CHAPITRE VII.

DÉVELOPPEMENTS EN SÉRIE.

CHAPITRE VIII.

MAXIMA ET MINIMA.

DEUXIÈME PARTIE.

PRINCIPES DU CALCUL INTÉGRAL.

CHAPITRE I.

INTÉGRALES INDÉFINIES.

CHAPITRE II.

RÉDUCTION D'INTÉGRALES INDÉFINIES.

CHAPITRE III.

INTÉGRALES DÉFINIES.

CHAPITRE IV.

EXTENSION DE LA NOTION D'INTÉGRALE DÉFINIE.

CHAPITRE V.

PROPRIÉTÉS DIVERSES RELATIVES AUX INTÉGRALES DÉFINIES.

TROISIÈME PARTIE.

APPLICATIONS GÉOMÉTRIQUES.

CHAPITRE I.

THÉORIE DU CONTACT; ENVELOPPES.

CHAPITRE II.

COURBES PLANES.

CHAPITRE III.

COURBES GAUCHES.

CHAPITRE IV.

LONGUEURS ET AIRES SUR LES SURFACES.

CHAPITRE V.

COURBURE DES SURFACES.

CHAPITRE VI.

REPRÉSENTATION DES SURFACES LES UNES SUR LES AUTRES.

FIN DE LA TABLE DES MATIÈRES.

ERRATA.

Pages.

36, ligne 12. *Au lieu de* A du + B dv + C dz, *lire* A du + B dv + C dw.

37, équat. (16 *bis*). » $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial u} d^2 u$ » $\frac{\partial \varphi}{\partial u} d^2 u$.

44, ligne 8 en remontant et suivantes. — Le raisonnement fait, dans ce passage, pour établir que $\frac{\partial \varphi}{\partial u}, \frac{\partial \varphi}{\partial v}, \frac{\partial \varphi}{\partial w}$ ne sont pas nuls à la fois, est insuffisant, parce que ces trois dérivées peuvent être nulles, non pas identiquement, *mais en tenant compte de l'équation* $\varphi(u, v, w) = 0$: cela se produira, par exemple, si $\varphi(u, v, w)$ est le carré d'un polynome entier en u, v, w. Pour rétablir la rigueur, il suffit de supposer la relation $\varphi = 0$ résolue par rapport à l'une des quantités u, v, w, en l'écrivant par exemple $-w + f(u, v) = 0$: en ce cas $\frac{\partial \varphi}{\partial w}$ est égal à -1 et n'est pas nul; le raisonnement du texte s'applique.

76, ligne 7. *Au lieu de* Chasles, *lire* Graves et Chasles.

83, ligne 6 du n° 88. » u, v, w, » $u, v, \ldots, w$.

131, ligne 14. » S et T, » des limites finies.

267, ligne 7. » seront, » resteront.

ligne 9. » id., » id.

COURS
D'ANALYSE.

PREMIÈRE PARTIE.

CALCUL DIFFÉRENTIEL.

CHAPITRE I.

GÉNÉRALITÉS; DIFFÉRENTIELLES.

I. — INTRODUCTION.

Limites.

1. Supposons acquise la notion de nombre incommensurable; on dit qu'une suite indéfinie de quantités réelles, commensurables ou non,

$$a_1, \quad a_2, \quad \ldots, \quad a_n, \quad \ldots$$

tend vers une limite, A, lorsque, étant donnée une quantité positive, ε, aussi petite que l'on veut, on peut assigner un nombre N, tel que, pour toute valeur de n supérieure ou égale à N, on ait

$$\operatorname{mod}(a_n - \mathrm{A}) < \varepsilon,$$

le symbole mod désignant la valeur absolue de $a_n - \mathrm{A}$. Par

exemple, les nombres

$$(1) \qquad \frac{9}{10}, \quad \frac{99}{100}, \quad \frac{999}{1000}, \quad \frac{9999}{10\,000}, \quad \ldots$$

tendent vers l'unité.

Si l'on considère deux suites,

$$a_1, \quad a_2, \quad \ldots, \quad a_n, \quad \ldots,$$
$$b_1, \quad b_2, \quad \ldots, \quad b_n, \quad \ldots$$

ayant pour limites respectives A et B, on voit aisément que :

1° Les quantités $a_n \pm b_n$ ont pour limite $A \pm B$;

2° Les produits $a_n b_n$ ont pour limite AB;

3° Les quotients $\frac{a_n}{b_n}$ ont pour limite $\frac{A}{B}$, à condition toutefois que B ne soit pas nul. Si $B = 0$ et $A \gtrless 0$, la valeur absolue de $\frac{a_n}{b_n}$ croît évidemment au delà de toute limite.

Des quantités en nombre illimité, qui vont sans cesse en croissant, ou qui du moins ne décroissent jamais, et qui restent inférieures à un nombre fixe, tendent vers une limite finie et déterminée : on sait que c'est ainsi que l'on définit un nombre incommensurable à l'aide d'une suite de nombres commensurables.

Le même résultat subsiste pour des quantités décroissantes, qui restent supérieures à un nombre fixe.

2. Théorème du maximum et du minimum. — Soit une suite (S) de quantités

$$(S) \qquad \alpha_1, \quad \alpha_2, \quad \ldots, \quad \alpha_n, \quad \ldots$$

en nombre limité ou illimité, ayant ou non une limite, mais toutes inférieures à un nombre fixe N.

Si elles sont en nombre limité, l'une d'elles est supérieure, ou au moins égale, à toutes les autres; mais il peut en être autrement dans le cas d'une suite illimitée, comme le montre immédiatement l'exemple de la suite (1)

$$(1) \qquad \frac{9}{10}, \quad \frac{99}{100}, \quad \frac{999}{1000}, \quad \frac{9999}{10\,000}, \quad \ldots.$$

Je dis que, dans tous les cas, les quantités (S) possèdent un *maximum*, c'est-à-dire qu'il existe un nombre M, jouissant des deux propriétés suivantes :

1° Aucune des quantités (S) ne dépasse M ;

2° Tout nombre M', inférieur à M, est surpassé par certaines de ces quantités.

Le maximum pourra être *atteint* ou *non atteint*. Il sera atteint si M est une des quantités de la suite, et ce cas se présente toujours lorsque ces quantités sont en nombre limité; il sera non atteint si M n'appartient pas à la suite, celle-ci étant alors illimitée. Par exemple, les quantités de la suite (1) admettent l'unité pour maximum non atteint, car aucune n'est égale à 1 ni ne dépasse 1, et tout nombre inférieur à 1 est surpassé par certaines d'entre elles.

Pour établir la proposition, partons du premier entier inférieur au nombre fixe N et descendons la série des entiers jusqu'à ce que nous arrivions à un entier E_0, atteint ou surpassé par une au moins des quantités (S). Si E_0 est atteint et non surpassé, c'est le maximum cherché; s'il est surpassé, ajoutons-lui *le plus grand nombre possible* de dixièmes, de manière à obtenir une somme, $E_1 = E_0 + \frac{e_1}{10}$, atteinte ou surpassée par une au moins des quantités (S) : d'après cela, le nombre $E_1 + \frac{1}{10}$ n'est atteint ou surpassé par aucune de ces quantités; de plus l'entier e_1 est inférieur à 10, puisque, par hypothèse, $E_0 + 1$ est supérieur à toutes les quantités considérées. Si le nombre E_1 est atteint et non surpassé, c'est le maximum; sinon, ajoutons-lui *le plus grand nombre possible* de centièmes, de manière à obtenir une nouvelle somme, $E_2 = E_1 + \frac{e_2}{100}$, atteinte ou surpassée. En continuant ainsi, on arrive, soit à prouver l'existence d'un maximum (atteint), soit à former une suite de nombres, dont le terme général est

$$E_i = E_0 + \frac{e_1}{10} + \frac{e_2}{10^2} + \ldots + \frac{e_i}{10^i},$$

les e_i étant inférieurs à 10 : ces nombres jouissent de la propriété

que E_i est surpassé par certaines des quantités (S) et que $E_i + \frac{1}{10^i}$ n'est atteint ou surpassé par aucune.

Les nombres E_i allant en croissant et demeurant inférieurs à $E_0 + 1$ ont une limite M, supérieure à chacun d'eux; je dis que M est le maximum (atteint ou non atteint) des quantités (S). En effet :

1° Aucune des quantités (S) ne dépasse M; car si l'une d'elles, α, le faisait, la différence $\alpha - M$ serait supérieure à une fraction de la forme $\frac{1}{10^i}$, de sorte que α surpasserait le nombre $M + \frac{1}{10^i}$, et *a fortiori* le nombre $E_i + \frac{1}{10^i}$; ce qui est contraire à l'un des résultats précédents;

2° Tout nombre inférieur à M est surpassé par une au moins des quantités (S) : il suffit évidemment de l'établir pour un nombre supérieur à E_0; or un tel nombre, étant compris entre deux nombres E_i et E_{i+1}, est surpassé par celles des quantités (S) qui surpassent elles-mêmes E_{i+1}.

On reconnaît de même que des quantités supérieures à un nombre fixe possèdent un minimum, atteint ou non atteint; toujours atteint, bien entendu, dans le cas de quantités en nombre limité.

Fonctions continues d'une ou de plusieurs variables.

3. **Continuité.** — On dit qu'une fonction réelle et déterminée, $f(x)$, est *continue* pour une valeur x_0 de la variable, lorsque, étant donné un nombre positif, ε, aussi petit que l'on veut, on peut assigner un nombre positif, η, tel que, pour toutes les valeurs de x comprises entre $x_0 - \eta$ et $x_0 + \eta$ (ces dernières incluses), on ait

$$\text{mod}[f(x) - f(x_0)] < \varepsilon. \tag{2}$$

On peut écrire aussi, en désignant par θ une quantité comprise entre -1 et $+1$,

$$f(x) = f(x_0) + \theta\varepsilon. \tag{3}$$

Nous dirons que η est un module de continuité correspondant à la valeur x_0 et au nombre ε.

La fonction $f(x)$ est dite *continue entre* $x = a$ *et* $x = b$, si elle est continue pour toutes les valeurs de x_0 comprises entre a et b; elle est dite *continue* dans le même intervalle, *extrémités comprises*, si la propriété définie par (2) subsiste pour $x_0 = a$ et $x_0 = b$, en ne prenant, bien entendu, pour x que des valeurs comprises entre a et b.

Ces définitions s'étendent d'elles-mêmes aux fonctions réelles et déterminées de plusieurs variables indépendantes.

Ainsi la fonction $f(x, y)$ sera continue pour $x = x_0$, $y = y_0$ si, étant donné ε, on peut assigner η tel que l'on ait

$$(4)\qquad \text{mod}[f(x,y) - f(x_0, y_0)] < \varepsilon, \quad \text{c.-à-d.} \quad f(x,y) = f(x_0, y_0) + \theta\varepsilon,$$

pour toutes les valeurs de x comprises entre $x_0 - \eta$ et $x_0 + \eta$, et toutes celles de y comprises entre $y_0 - \eta$ et $y_0 + \eta$ (les valeurs extrêmes incluses).

Géométriquement, si M_0 est le point de coordonnées rectangulaires (x_0, y_0), cela revient à dire qu'étant donné ε, on peut trouver un carré R, de centre M_0 et de côtés parallèles aux axes, tel que, pour tout point (x, y) de ce carré (côtés compris), la différence entre $f(x, y)$ et $f(x_0, y_0)$ soit, en valeur absolue, inférieure à ε. Le côté du carré R est 2η.

Nous dirons encore que η est un module de continuité pour le point (x_0, y_0) et pour le nombre ε.

La fonction $f(x, y)$ sera *continue dans une région* A du plan si elle est continue pour tous les systèmes x, y de cette région; elle sera continue dans A, *contour compris*, si la propriété définie par (4) subsiste encore pour tout point x_0, y_0 du contour, en ne prenant alors pour x, y que les points du carré R ci-dessus, intérieurs à l'aire A.

Les fonctions continues jouissent de propriétés importantes qui vont être démontrées; on établira d'abord un lemme géométrique qui sera souvent utile.

4. Lemme de la décomposition des carrés. — Soit, dans un plan, un carré Q, de côtés parallèles aux axes de coordonnées;

décomposons-le en quatre carrés égaux Q_1, Q'_1, Q''_1, Q'''_1 par des parallèles aux axes issues de son centre, et choisissons arbitrairement un des nouveaux carrés, Q_1 par exemple. Décomposons-le de même en quatre carrés égaux, et choisissons arbitrairement l'un d'eux, Q_2. En continuant ces décompositions, nous obtenons une suite illimitée de carrés, Q, Q_1, Q_2, ... dont chacun comprend le suivant, et dont les côtés peuvent devenir aussi petits que l'on veut : je dis que ces carrés ont pour limite un point, intérieur à chacun d'eux.

Considérons en effet, sur l'axe des x, les deux points qui sont les abscisses des quatre sommets d'un carré; ils limitent un segment, et chacun des segments ainsi obtenus comprend le suivant, dont il est le double. Les abscisses des extrémités supérieures des segments ne croissent jamais et restent plus grandes que l'abscisse d'une quelconque des extrémités inférieures; les abscisses de celles-ci ne décroissent jamais et restent plus petites que les précédentes. Chacune des deux séries d'abscisses tend donc vers une limite, et les deux limites sont les mêmes, puisque la longueur des segments peut devenir inférieure à toute quantité donnée. Soit x_0 l'abscisse limite ainsi obtenue; on établit de même l'existence d'une ordonnée limite analogue y_0, et dès lors les carrés considérés plus haut ont pour limite le point (x_0, y_0), qui, d'après la définition même de x_0 et de y_0, est à l'intérieur de chacun d'eux.

Un lemme semblable s'appliquerait à la décomposition d'un cube en huit autres cubes égaux, par des plans parallèles aux faces et issus du centre.

5. Théorème. — *Une fonction continue dans une région finie A, contour compris, est limitée supérieurement et inférieurement dans cette région.*

Observons d'abord qu'une fonction $f(x, y)$, de deux variables par exemple, continue dans une aire finie A, est limitée dans un carré, de côtés parallèles aux axes, ayant pour centre un point quelconque (x_0, y_0) de l'aire A ou de son contour [1] : il suffit en

[1] Il s'agit, bien entendu, de la portion du carré, périmètre compris, qui appartient à l'aire A ou à son contour. Cette remarque s'applique à tout ce qui suit.

effet de prendre pour côté le double, 2η, d'un module de continuité correspondant au point (x_0, y_0) et à un nombre ε. Dans ce carré, R, $f(x, y)$ reste comprise entre $f(x_0, y_0) - \varepsilon$ et $f(x_0, y_0) + \varepsilon$, c'est-à-dire est limitée inférieurement et supérieurement.

Supposons maintenant que $f(x, y)$ ne soit pas limitée supérieurement dans l'aire A, je dis que l'on arrive à une contradiction.

Soit en effet Q un carré de côtés parallèles aux axes contenant toute la région A; divisons-le, par le procédé du n° 4, en quatre carrés égaux. Dans l'un au moins de ceux-ci, Q_1, la fonction $f(x, y)$ ne sera pas limitée supérieurement, sinon elle serait limitée dans le carré total; divisons de même Q_1 en quatre carrés, et ainsi de suite. Nous formons par là une suite de carrés, Q, Q_1, Q_2, ..., dans aucun desquels $f(x, y)$ n'est limitée supérieurement. Ces carrés ont pour limite (n° 4) un point (x_0, y_0), que je dis appartenir à l'aire A, ou à son contour : autrement, en effet, un des carrés de la série et tous les suivants deviendraient extérieurs à A, ce qui est incompatible avec leur mode de détermination. Or les carrés Q_i, ayant le point (x_0, y_0) pour limite, finiront, à partir de l'un d'eux, par rester intérieurs au carré R, de côté 2η, défini plus haut, qui admet ce point pour centre : il est dès lors contradictoire que $f(x, y)$ soit limitée supérieurement dans le carré R, et ne le soit dans aucun des carrés Q_i.

C. Q. F. D.

Une démonstration analogue établit que $f(x, y)$ est limitée inférieurement; la décomposition en cubes étend le raisonnement à une fonction de trois variables indépendantes.

6. Théorème. — *Une fonction continue dans une région finie, contour compris, a, dans cette région, un maximum et un minimum, atteints effectivement.*

En effet, d'après le théorème précédent, la fonction $f(x, y)$ est, dans la région A, limitée supérieurement, c'est-à-dire reste inférieure à un nombre fini; par suite, en vertu du théorème du maximum (n° 2) les valeurs de $f(x, y)$, dans A, admettent un maximum M, atteint ou non atteint. Je dis qu'en le supposant non atteint, on arrive à une contradiction.

Reprenons en effet le carré Q du numéro précédent, et décom-

posons le en quatre autres : dans l'un au moins de ceux-ci, Q_1, $f(x,y)$ admettra M comme maximum non atteint, sinon elle ne l'admettrait pas comme tel dans Q. En poursuivant, on forme ainsi une série de carrés, Q_i, tendant vers un point (x_0, y_0), dans chacun desquels $f(x,y)$ admet M comme maximum non atteint, c'est-à-dire prend des valeurs inférieures à M, mais aussi voisines de M qu'on veut. Les carrés Q_i finissant par être intérieurs au carré R, de centre (x_0, y_0), qui répond au nombre ε, la fonction $f(x,y)$ ne peut y prendre que des valeurs comprises entre $f(x_0, y_0) - \varepsilon$ et $f(x_0, y_0) + \varepsilon$. En d'autres termes, des valeurs inférieures à M, mais aussi voisines de M qu'on veut, sont aussi voisines qu'on veut de $f(x_0, y_0)$: il en résulte nécessairement que M est égal à $f(x_0, y_0)$, c'est-à-dire que le maximum est *atteint* au point (x_0, y_0), résultat en contradiction avec l'hypothèse.

Une démonstration pareille s'applique au minimum.

7. **Théorème**. — *Une fonction, continue dans une région finie, contour compris, et qui est négative en un point de cette région, positive en un autre, s'annule dans la région.*

Supposons que $f(x,y)$ soit négative pour (x_1, y_1) et positive pour (x_2, y_2); décomposons en quatre carrés le carré Q qui contient la région donnée A. Je dis que, dans l'un au moins des carrés nouveaux, contour compris, la fonction $f(x,y)$ prend des valeurs positives et des valeurs négatives. Imaginons en effet que dans chaque carré, contour compris, la fonction garde un signe constant, c'est-à-dire qu'il y ait des carrés positifs et des carrés négatifs, et joignons le point (x_1, y_1) au point (x_2, y_2) par une ligne quelconque, tout entière dans l'aire A [1] : cette ligne passera au moins une fois d'un carré négatif à un carré positif, de sorte que la valeur de $f(x,y)$, au point où la ligne passe d'un carré dans l'autre, sera à la fois négative et positive, c'est-à-dire

---

[1] On suppose ici que l'aire A est d'un seul tenant, c'est-à-dire que l'on peut joindre un point quelconque de cette région à un autre point quelconque par une ligne continue sans sortir de la région. Ainsi l'aire comprise entre deux cercles concentriques est d'un seul tenant; au contraire, les aires de deux cercles extérieurs l'un à l'autre forment une région qui n'est pas d'un seul tenant.

sera nulle, ce qui établit le théorème. Pour échapper à cette conclusion, il faut donc que dans un des quatre carrés, Q_1 par exemple, la fonction prenne des valeurs de signes contraires, et ainsi de suite, en poursuivant la décomposition en carrés.

On forme ainsi une suite de carrés Q_i, dans chacun desquels $f(x, y)$ est négative et positive et qui tendent vers un point (x_0, y_0) de l'aire A ou de son contour. Si $f(x_0, y_0)$ est nul, le théorème est démontré; sinon, je dis qu'on arrive à une contradiction. Soient en effet ε un nombre inférieur, en valeur absolue, à $f(x_0, y_0)$, et R le carré déjà introduit de centre (x_0, y_0), qui correspond au nombre ε. Les carrés Q_i finissent par être intérieurs à R; alors la valeur de $f(x, y)$ dans l'un d'eux reste comprise, en vertu de la définition même de la continuité, entre $f(x_0, y_0) + \varepsilon$ et $f(x_0, y_0) - \varepsilon$, quantités de même signe : la fonction $f(x, y)$ ne peut donc prendre, dans le carré, des valeurs de signes contraires, ce qui contredit un des résultats précédents.

C. Q. F. D.

8. **Corollaire.** — Une fonction continue dans une région finie d'un seul tenant, contour compris, prend dans cette région toutes les valeurs comprises entre son minimum m et son maximum M.

Soit en effet μ une quantité comprise entre m et M; la fonction continue $f(x, y) - \mu$ est négative au point qui répond au minimum, positive au point qui répond au maximum. Elle s'annule donc dans la région. C. Q. F. D.

9. **Continuité uniforme.** — Une fonction $f(x, y)$, continue dans une région A du plan, est dite *uniformément continue* dans cette région, si, ε étant donné aussi petit qu'on veut, on peut assigner un nombre η, fonction de ε seul, tel que l'on ait

$$\text{mod}[f(x, y) - f(x_0, y_0)] < \varepsilon$$

pour tous les points (x_0, y_0) de A, et pour toutes les valeurs de x, y respectivement comprises entre $x_0 - \eta$ et $x_0 + \eta$; $y_0 - \eta$ et $y_0 + \eta$. Le nombre η, ou $\eta(\varepsilon)$, sera dit *module de continuité uniforme* dans A, pour le nombre ε. Il est clair que tout nombre inférieur à un module de continuité est aussi module de continuité.

Il semble, au premier abord, qu'une fonction continue dans une région A, contour compris, y soit uniformément continue. En effet, la fonction, étant continue dans A, admet en chaque point (x_0, y_0), et pour un nombre donné ε, un module de continuité η, fonction de x_0, y_0 et ε; le plus petit de ces modules quand x_0 et y_0 varient dans A, ε restant fixe, ou *a fortiori* un nombre inférieur, est évidemment un module de continuité uniforme dans A pour le nombre ε, ce qui paraît établir le théorème.

Le raisonnement est inexact, parce que les modules η n'ont pas nécessairement de minimum, ou de limite inférieure non nulle : ils peuvent admettre zéro pour minimum *non atteint*, de sorte qu'aucun d'eux n'est nul et qu'on ne peut assigner de nombre positif qui leur soit inférieur à tous.

On s'appuiera, pour une démonstration exacte, sur le lemme suivant.

10. **Lemme.** — *Si η est module de continuité de $f(x, y)$ pour le point (x_0, y_0) et le nombre ε, le nombre $\frac{1}{2}\eta$ sera un module de continuité uniforme pour le nombre 2ε, à l'intérieur du carré R', de côté η, de centre (x_0, y_0) et de côtés parallèles aux axes.*

On a en effet, d'après la définition même de la continuité au point (x_0, y_0) :

$$f(x, y) - f(x_0, y_0) = \theta\varepsilon, \qquad f(a, b) - f(x_0, y_0) = \theta'\varepsilon,$$

en désignant par (x, y) et (a, b) deux points quelconques, intérieurs au carré R, de centre (x_0, y_0) et de côté 2η; quant à θ et θ', ce sont des nombres compris entre -1 et $+1$. On en tire

$$f(x, y) - f(a, b) = (\theta - \theta')\varepsilon,$$

c'est-à-dire

$$\operatorname{mod}[f(x, y) - f(a, b)] < 2\varepsilon.$$

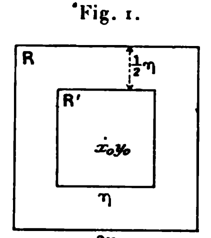
A fortiori, cette dernière inégalité aura lieu si, le point x, y restant dans le carré R, le point (a, b) reste dans le carré R', de centre (x_0, y_0) et de côté η (*fig.* 1) : or, quel que soit le point (a, b) dans R', le point dont les coordonnées sont respectivement comprises entre $a - \frac{\eta}{2}$, $a + \frac{\eta}{2}$ et $b - \frac{\eta}{2}$, $b + \frac{\eta}{2}$ sera dans R et pourra

être pris pour le point (x, y). On aura donc

$$\text{mod}[f(x, y) - f(a, b)] < 2\varepsilon$$

pour tous les points (a, b) de R′ et pour toutes les valeurs de x, y

Fig. 1.



comprises respectivement entre $a - \frac{\eta}{2}$, $a + \frac{\eta}{2}$ et $b - \frac{\eta}{2}$, $b + \frac{\eta}{2}$, ce qui établit le lemme.

Démontrons maintenant que :

11. Théorème. — *Toute fonction continue dans une région finie* A, *et sur son contour, est uniformément continue dans la même région.*

Supposons en effet qu'il en soit autrement, c'est-à-dire que, pour un certain nombre 2ε, on ne puisse trouver de module de continuité uniforme de la fonction $f(x, y)$ dans l'aire A; je dis qu'on est ainsi conduit à une contradiction.

Reprenons en effet le carré Q, qui comprend toute l'aire A, et divisons-le en quatre autres; dans l'un au moins de ceux-ci, Q_1, la fonction $f(x, y)$ n'admettra pas de module de continuité uniforme pour le nombre 2ε : autrement, en effet, elle admettrait comme module, dans Q, le plus petit des quatre modules qui répondent aux carrés secondaires. En divisant alors Q_1 en quatre carrés et poursuivant le raisonnement, on forme une série de carrés Q_i, tendant vers un point (x_0, y_0) de l'aire A ou de son contour, et dans chacun desquels $f(x, y)$ n'a pas de module de continuité uniforme pour le nombre 2ε. Or, soit R′ le carré de centre (x_0, y_0) défini dans le lemme, et à l'intérieur duquel $f(x, y)$ admet, pour ce même nombre, 2ε, un module de continuité uniforme : il est contradictoire que $f(x, y)$ ait un tel

module dans R' et n'en ait pas dans les carrés Q_i, puisque ceux-ci finissent par être tous intérieurs au carré R'. C. Q. F. D.

12. Dérivée. — Si $f(x)$ est une fonction continue pour $x = a$, la différence $f(a+h) - f(a)$, d'après la définition de la continuité, tend vers zéro avec h; si de plus le quotient

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

tend vers une limite finie et déterminée lorsque h tend vers zéro *d'une manière quelconque*, cette limite est dite la *dérivée de la fonction* $f(x)$ pour $x = a$. On la représente par $f'(a)$.

Dans cet énoncé les mots *d'une manière quelconque* sont indispensables : en effet, faire tendre h vers zéro, c'est (n° 1) faire passer h par une suite de valeurs successives

$$b_1, \quad b_2, \quad \ldots, \quad b_n, \quad \ldots$$

ayant pour limite zéro; or, il peut se faire que pour deux suites convenablement choisies, le quotient $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ ait deux limites différentes. Voici un exemple :

Soit

$$f(x) = x \sin\frac{1}{x} \qquad \text{et} \qquad a = 0.$$

On a

$$f(0) = 0 \qquad \text{et} \qquad \frac{f(h)-f(0)}{h} = \sin\frac{1}{h};$$

cette expression tend vers 1 si h tend vers 0 en passant par la suite de valeurs

$$\frac{1}{\frac{\pi}{2}+2k\pi}, \quad \frac{1}{\frac{\pi}{2}+2(k+1)\pi}, \quad \ldots, \quad \frac{1}{\frac{\pi}{2}+2n\pi}, \quad \ldots;$$

elle tend vers 0, si h tend vers 0 en passant par la suite de valeurs

$$\frac{1}{2k\pi}, \quad \frac{1}{2(k+1)\pi}, \quad \ldots, \quad \frac{1}{2n\pi}, \quad \ldots.$$

La fonction $f(x)$, d'après cela, n'a pas de dérivée pour $x = 0$.

Les règles du calcul des dérivées ont été données dans le *Cours*

de Mathématiques spéciales; nous les supposerons connues, et nous admettrons également les résultats fondamentaux relatifs aux dérivées des fonctions usuelles.

Remarque. — Il est clair qu'une fonction qui admet une dérivée pour $x = a$ est continue en ce point; on a cru longtemps que la réciproque était vraie, c'est-à-dire qu'une fonction continue admettait nécessairement une dérivée. Il n'en est rien, comme l'a montré Weierstrass qui a donné un exemple de fonction continue sans dérivée; mais de tels cas sont exceptionnels, et l'on n'aura à considérer dans ce Cours que des fonctions (continues) admettant des dérivées.

II. — INFINIMENT PETITS.

---

13. Un infiniment petit est une quantité *variable* qui a pour limite zéro, c'est-à-dire qui prend successivement une série de valeurs tendant vers zéro. Une quantité *fixe*, si petite qu'on la suppose, ne peut donc être un infiniment petit.

Un infiniment petit ne figure jamais seul dans un calcul, car à la limite il faudrait le remplacer par zéro, et il eût été inutile de l'introduire au début; on introduit simultanément plusieurs infiniment petits, de manière que, dans les équations obtenues, *chaque* terme ait un infiniment petit en facteur.

Si x est un infiniment petit et si une fonction $f(x)$ tend vers zéro quand x tend vers zéro d'une manière quelconque, on dit que $f(x)$ est infiniment petit avec x. Ce nouvel infiniment petit est fonction du premier, x, lequel est dit *infiniment petit principal.*

On dit que l'infiniment petit $f(x)$ est d'ordre m par rapport à x lorsque le rapport $\frac{f(x)}{x^m}$ tend vers une limite finie et non nulle pour $x = 0$; m est essentiellement une quantité positive.

14. Exemples d'infiniment petits. — La fonction $\sin x$ est infiniment petite du premier ordre avec x; la fonction $\sin x - x$ est

infiniment petite du troisième ordre, car on sait que

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \ldots.$$

La fonction $1 - \cos x$ est infiniment petite du second ordre (toujours pour $x = 0$), car

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \ldots.$$

De là résulte cette conséquence géométrique : si un triangle rectangle a un angle x, infiniment petit, la différence des deux côtés qui comprennent cet angle est infiniment petite du second ordre par rapport à x (*fig.* 2), car

$$OB - OA = OB(1 - \cos x) = OB\frac{x^2}{2}\left(1 - \frac{x^2}{12} + \ldots\right).$$

On dit aussi que les deux côtés considérés sont égaux au second ordre près.

Fig. 2.

Il existe des infiniment petits qui ne sont d'aucun ordre; ainsi $x \log x$ tend vers zéro avec x; mais, quel que soit le nombre positif m, $\frac{x \log x}{x^m}$ n'a pas de limite finie et non nulle pour $x = 0$; car si m est supérieur ou égal à 1, l'expression devient infinie; si m est inférieur à 1, elle devient nulle. L'infiniment petit $x \log x$ n'a donc pas d'ordre par rapport à x.

On donnera, dans la suite du Cours, de nombreux exemples d'infiniment petits empruntés à la Géométrie.

15. Valeur principale. — D'après la définition, un infiniment petit y, d'ordre m par rapport à x, satisfait à la relation

$$\frac{y}{x^m} = A + \varepsilon,$$

A étant une quantité finie et non nulle, et ε tendant vers zéro

avec x. On en tire

$$y = Ax^m + \varepsilon x^m.$$

Le terme Ax^m se nomme la *valeur principale* de l'infiniment petit y. Soit de même Bx^n la valeur principale de l'infiniment petit ε; on a

$$y = Ax^m + Bx^{m+n} + \varepsilon_1 x^{m+n},$$

ε_1 étant infiniment petit. On peut continuer ce calcul, et mettre ainsi y sous forme d'une somme de 2, 3, 4, ... termes infiniment petits, dont chacun est d'ordre supérieur aux précédents.

16. Corollaires. — La *valeur principale de la somme* d'un nombre fini de termes est la même que celle de la somme des valeurs principales des termes.

Par exemple, la valeur principale de $\sin x + \operatorname{tang} x + x^2$, pour x infiniment petit, est la même que celle de $x + x + x^2$, c'est-à-dire $2x$.

Il y a cependant un *cas d'exception :* c'est celui où les termes d'ordre le moins élevé se détruisent, comme dans $\sin x - x + x^3$. La valeur principale n'est alors pas la même que celle de $x - x + x^3$, qui serait x^3; pour l'obtenir, il faut pousser le développement de $\sin x$ jusqu'au second terme, ce qui donne pour la valeur principale

$$x - \frac{x^3}{6} - x + x^3 = \frac{5x^3}{6}.$$

Dans les applications, un peu d'attention suffit pour éviter toute erreur : on est en effet prévenu du cas d'exception par ce fait que l'on obtient pour la valeur principale cherchée, en appliquant la règle générale, un infiniment petit d'ordre supérieur à l'ordre prévu.

La *valeur principale du produit* d'un nombre fini de termes est le produit des valeurs principales des termes, sans cas d'exception.

Ainsi la valeur principale, pour x infiniment petit, de $x^2 \sin x \cos x$ est x^3.

Par extension, si une fonction $f(x)$, de l'infiniment petit x, tend vers A pour $x = 0$, A étant une constante non nulle, on dira que A *est la valeur principale de $f(x)$* pour $x = 0$. C'est ainsi que, dans l'exemple précédent, la valeur principale du facteur $\cos x$ a été prise égale à 1.

17. L'inverse d'un infiniment petit est une quantité dont la valeur absolue croît au delà de toute limite, c'est-à-dire un *infiniment grand.* On dit qu'un infiniment grand $F(x)$ est d'ordre m par rapport à x quand $\frac{1}{F(x)}$ est un infiniment petit d'ordre m; on a ainsi

$$\frac{1}{F(x)} = A x^m + \varepsilon x^m;$$

d'où

$$F(x) = \frac{1}{A+\varepsilon}\frac{1}{x^m} = \frac{1}{A x^m}\left(1 - \frac{\varepsilon}{A+\varepsilon}\right)$$

et $\frac{1}{A x^m}$ sera la *valeur principale* de l'infiniment grand $F(x)$.

18. Soient deux infiniment petits y et z, fonctions d'un même infiniment petit principal x, et d'ordres m et n :

1° *Si y et z sont du même ordre $(m = n)$, la limite du quotient $\frac{y}{z}$, quand x tend vers zéro, est le quotient des valeurs principales de y et de z;*

2° *Si y est d'ordre supérieur à $z (m > n)$, $\frac{y}{z}$ est un infiniment petit dont la valeur principale est le quotient des valeurs principales de y et de z;*

3° *Si y est d'ordre inférieur à $z (m < n)$, $\frac{y}{z}$ est un infiniment grand dont la valeur principale est encore le quotient des valeurs principales de y et de z.*

Ces propositions résultent des définitions

$$y = x^m (A + \varepsilon), \qquad z = x^n (B - \varepsilon');$$

d'où

$$\frac{y}{z} = x^{m-n}\frac{A+\varepsilon}{B-\varepsilon'} = \frac{A}{B}x^{m-n}\left[1 + \frac{B\varepsilon - A\varepsilon'}{A(B+\varepsilon')}\right];$$

au dernier membre, $\frac{A}{B}x^{m-n}$ est le quotient des valeurs principales Ax^m et Bx^n, de y et de z, et la quantité entre crochets tend vers 1 pour $x = 0$, ce qui démontre les trois cas du théorème.

III. — DIFFÉRENTIELLES DES FONCTIONS D'UNE VARIABLE.

19. Formule des accroissements finis. — On établit, dans le Cours de Mathématiques spéciales, l'importante proposition suivante :

Si $f(x)$ désigne une fonction continue entre $x = a$ et $x = b$, admettant dans cet intervalle une dérivée finie et déterminée, $f'(x)$, on a

$$f(x+h) - f(x) = h f'(x + \theta h),$$

pour toutes les valeurs de $x + h$ et de x comprises entre a et b, en désignant par θ une quantité comprise entre o *et* 1.

On en déduit, en particulier, qu'une fonction, continue entre a et b, dont la dérivée est nulle dans cet intervalle, est une constante dans le même intervalle.

20. Différentielle première. — Soit y une fonction de x, $y = f(x)$; désignons par Δy son accroissement pour l'accroissement infiniment petit h de x.

Si $f(x)$ admet une dérivée pour la valeur x de la variable on a

$$\text{limite (pour } h = 0\text{) de } \frac{\Delta y}{h} = f'(x),$$

c'est-à-dire que Δy est, par rapport à h, un infiniment petit du premier ordre, dont la valeur principale est $h f'(x)$. On désigne cette valeur principale par dy, et on l'appelle *différentielle* ou *différentielle première* de la fonction y. Ainsi, par définition,

$$dy = h f'(x),$$

et dy est la valeur principale de l'accroissement de y, quand x éprouve l'accroissement h.

Appliquons cette formule à la fonction $y = x$; il vient, puisque $f'(x) = 1$,

$$dx = h,$$

c'est-à-dire que *la différentielle de la variable indépendante est égale à son accroissement.*

On en déduit

$$dy = f'(x)\,dx,$$

c'est-à-dire que *la différentielle d'une fonction de x est le produit de la dérivée par l'accroissement infiniment petit dx de la variable.*

D'après cela Δy et dx sont des infiniment petits du même ordre, sauf pour les valeurs particulières de x qui rendent $f'(x)$ nul ou infini. Par exemple, dans une courbe en coordonnées polaires $\rho = f(\omega)$, $\Delta\rho$ et $d\omega$ sont des infiniment petits du même ordre, sauf en certains points spéciaux de la courbe.

21. **Corollaire**. — Deux fonctions d'une même variable dont les différentielles sont identiques ne diffèrent que d'une constante : car cela revient à dire qu'elles ont même dérivée, et leur différence, ayant une dérivée nulle, est dès lors une constante (n° 19).

22. **Remarque**. — Il résulte de là que, pour déterminer la dérivée d'une fonction inconnue, définie par des propriétés géométriques ou physiques, on n'aura qu'à chercher la valeur principale de l'accroissement, en négligeant les infiniment petits d'ordre supérieur au premier. Cette valeur principale sera le produit de dx par la dérivée ; on connaîtra ainsi la dérivée, d'où l'on remontera à la fonction.

C'est là un des principes fondamentaux du Calcul infinitésimal ; il est d'ailleurs indépendant de la *notation* différentielle, et traduit la définition même de la dérivée.

Nous aurons souvent à l'appliquer dans ce Cours ; un exemple connu en Physique est l'évaluation des hauteurs par le baromètre.

Soient p la pression atmosphérique à la hauteur z, δ la densité de l'air à cette hauteur. Si l'on s'élève de dz, la *diminution* de pression sur l'unité de surface est le poids du prisme gazeux de base 1 et de hauteur dz.

Or si $\delta - \varepsilon$ est la densité du gaz à la hauteur $z + dz$, il est clair que le poids considéré est compris entre $(\delta - \varepsilon)\,dz$ et $\delta\,dz$; mais ε, s'annulant avec dz, est un infiniment petit, de sorte que $\varepsilon\,dz$ est d'ordre supérieur au premier par rapport à dz. La

valeur principale dp de l'accroissement de pression est donc

$$-dp = \delta\, dz.$$

D'ailleurs δ est, comme on sait, proportionnel à p, $\delta = kp$, et il vient

$$\frac{dp}{p} = -k\, dz.$$

Les deux fonctions $\operatorname{Log} p$ et $-kz$ ayant des différentielles identiques, on en conclut (n° **21**)

$$\operatorname{Log} p = -kz + \text{const.},$$

ou, sous une autre forme,

$$p = \mathrm{C} e^{-kz},$$

C étant une constante. C'est la loi de Laplace.

23. Exemples de calcul de différentielles. — Soient u, v, w des fonctions de la variable x; toute fonction, $\varphi(u, v, w)$, de u, v, w, est dite *fonction composée* de x. En vertu d'une règle de dérivation connue, la dérivée de $\varphi(u, v, w)$ étant

$$\varphi'_u u'_x + \varphi'_v v'_x + \varphi'_w w'_x,$$

la différentielle sera le produit de cette expression par dx; c'est-à-dire, en observant que $u'_x\, dx = du$,

$$(1) \qquad d\varphi(u, v, w) = \varphi'_u\, du + \varphi'_v\, dv + \varphi'_w\, dw,$$

formule importante, où φ'_u, φ'_v, φ'_w sont les dérivées partielles de φ par rapport à u, v, w; c'est-à-dire que φ'_u est la dérivée de φ quand on regarde u comme variable indépendante, et v, w comme constants.

On en déduit les corollaires suivants :

Différentielle d'une somme :

$$d(u + v + \ldots) = du + dv + \ldots;$$

Différentielle d'un produit :

$$d(uvw) = vw\, du + uw\, dv + uv\, dw = uvw\left(\frac{du}{u} + \frac{dv}{v} + \frac{dw}{w}\right);$$

Différentielle d'un quotient :

$$d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{du}{v} - u\frac{dv}{v^2} = \frac{v\,du - u\,dv}{v^2};$$

Différentielle d'une puissance :

$$d(u^m) = mu^{m-1}\,du;$$

Différentielles diverses :

$$d(\sin u) = \cos u\,du,$$
$$d(\cos u) = -\sin u\,du,$$
$$d(\operatorname{tang} u) = \frac{1}{\cos^2 u}\,du = (1 + \operatorname{tang}^2 u)\,du,$$
$$d \operatorname{arc} \sin u = \frac{du}{\pm\sqrt{1-u^2}},$$
$$d \operatorname{arc} \operatorname{tang} u = \frac{du}{1+u^2},$$
$$d(e^u) = e^u\,du,$$
$$d(\operatorname{Log} u) = \frac{du}{u},$$

le Log étant népérien.

24. Remarque I. — La relation $dy = f'(x)\,dx$ montre que la dérivée $f'(x)$, ou y'_x, de y par rapport à x, est le quotient des différentielles dy et dx, dy étant la différentielle de y qui correspond à l'accroissement dx :

$$y'_x = \frac{dy}{dx}.$$

Soient de même u une autre fonction de x, du sa différentielle correspondant *au même accroissement dx* que ci-dessus; on a

$$u'_x = \frac{du}{dx};$$

d'où

$$y'_x : u'_x = \frac{dy}{du}.$$

Or, d'après la théorie des dérivées, si l'on regarde y comme fonction de u, $y'_x : u'_x$ est la dérivée de y par rapport à u; on peut donc écrire :

$$y'_u = \frac{dy}{du} \qquad \text{ou} \qquad dy = y'_u\,du.$$

Par suite, si l'on désigne par dy et du les différentielles de y et de u pour un *même* accroissement de la variable indépendante x dont dépendent ces deux fonctions : 1° la dérivée de y par rapport à u est égale à $\frac{dy}{du}$; 2° si l'on donne à u l'accroissement du, la différentielle correspondante de y, considérée comme fonction de u, est la même que celle qui répondait à l'accroissement dx, pour y considérée comme fonction de x.

C'est là une double propriété importante des différentielles premières, et que l'on ne retrouve plus dans les différentielles d'ordre supérieur.

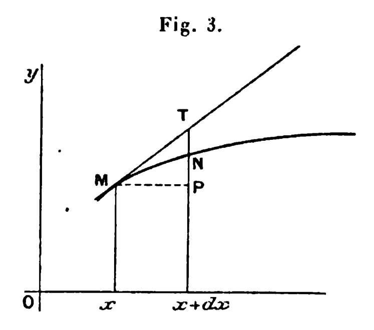
25. **Remarque II.** — *Géométriquement,* on sait que $f'(x)$ est le coefficient angulaire de la tangente MT, menée à la courbe $y=f(x)$ au point M d'abscisse x.

Si donc on mène la parallèle à Oy d'abscisse $x+dx$, le triangle rectangle TMP (*fig.* 3) donne

$$\text{TP} = \text{MP}\tan\text{g}\widehat{\text{M}} = dx f'(x).$$

Donc $dy = \text{TP}$; c'est-à-dire que dy est *rigoureusement* égal à

Fig. 3.



l'accroissement de l'ordonnée quand on passe du point d'abscisse x, sur *la courbe,* au point d'abscisse $x+dx$ sur *la tangente* à la courbe au point x.

On peut observer que, quand on passe de x à $x+dx$, l'accroissement Δy de l'ordonnée est NP : comme $dy = \text{TP}$ est la valeur principale de Δy, la différence $dy - \Delta y$, c'est-à-dire TN, est un infiniment petit d'ordre supérieur à dy, c'est-à-dire à dx.

En d'autres termes : la portion d'ordonnée comprise entre une

courbe et une tangente est un infiniment petit d'ordre supérieur au premier, par rapport à la distance du point de contact à l'ordonnée considérée.

On retrouvera et l'on étendra ce résultat dans la théorie générale du contact des courbes.

26. Différentielle seconde. — Soient x et x_1 deux valeurs de la variable indépendante; comparons les différentielles d'une même fonction $y = f(x)$, pour ces deux valeurs :

$$dy = f'(x)\,dx, \qquad dy_1 = f'(x_1)\,dx_1.$$

Comme dy et dy_1 dépendent de dx et de dx_1, qui sont deux infiniment petits indépendants l'un de l'autre, on ne peut les comparer qu'en établissant une liaison entre dx et dx_1 : il est naturel de supposer $dx_1 = dx$, c'est-à-dire d'admettre que les deux accroissements de x sont les mêmes.

Dans cette hypothèse, formons la différence $dy_1 - dy$:

$$dy_1 - dy = [f'(x_1) - f'(x)]\,dx.$$

Supposons maintenant que x_1 tende vers x, en faisant $x_1 = x + \delta x$; on aura, d'après le théorème des accroissements finis, et en désignant par $f''(x)$ la dérivée de $f'(x)$:

$$dy_1 - dy = f''(x + \theta\,\delta x)\,dx\,\delta x,$$

et, à la limite, en faisant tendre δx vers zéro,

$$\text{Valeur principale de } (dy_1 - dy) = f''(x)\,dx\,\delta x.$$

Le premier membre est donc un infiniment petit, dépendant du produit de deux infiniment petits, dx et δx, qui, d'après la manière même dont on les a introduits et définis, sont arbitraires et n'ont entre eux aucune liaison : *nous les supposerons égaux* (bien que cette hypothèse ne soit pas indispensable) afin de simplifier l'écriture; il vient ainsi

$$\text{Valeur principale de } (dy_1 - dy) = f''(x)\,dx^2.$$

Le premier membre, valeur principale de la différence des différentielles dy_1 et dy, qui correspondent respectivement aux valeurs $x + dx$ et x de la variable et au même accroissement dx, se

nomme *différentielle seconde* de la fonction y, et se désigne par d^2y. Ainsi

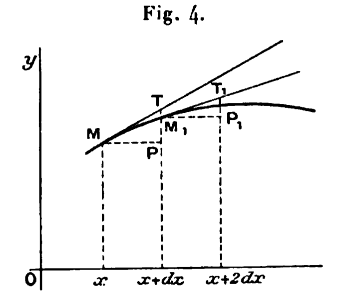
$$(2) \qquad d^2y = f''(x)\,dx^2.$$

On voit que l'on obtient d^2y en différentiant l'expression $f'(x)\,dx$, de dy, et en traitant dans ce calcul le facteur dx comme une constante : c'est ce qui fait dire que d^2y est la différentielle de dy, lorsqu'on suppose l'accroissement dx indépendant de x, mais cette manière de voir ne saurait, sans obscurité, être présentée comme la définition de la différentielle seconde.

27. *Géométriquement* notre définition de la différentielle seconde s'interprète ainsi.

Considérons toujours la courbe $y = f(x)$ et menons les ordonnées qui correspondent aux abscisses x, $x_1 = x + dx$, et

Fig. 4.



$x_1 + dx = x + 2\,dx$; on a sur la figure, en traçant les tangentes en M et M_1 (*fig.* 4),

$$dy = TP, \qquad dy_1 = T_1P_1;$$

par suite

$$dy_1 - dy = T_1P_1 - TP,$$

et la différentielle seconde est, par définition, la valeur principale de $T_1P_1 - TP$, dx étant l'infiniment petit principal.

28. Différentielle seconde d'une fonction composée. — Soit $y = \varphi(u, v, w)$; u, v, w étant des fonctions de x : on sait (n° 23) que

$$(3) \qquad dy = A\,du + B\,dv + C\,dw,$$

A, B, C étant les trois dérivées partielles de φ. Proposons-nous de

calculer d^2y. On peut écrire

$$dy = (A u' + B v' + C w')\, dx,$$

u', v', ... étant les dérivées de u, v, ... par rapport à x; et par suite, d'après la relation de définition (2),

$$d^2y = (A u' + B v' + C w')'_x\, dx^2 = (A u'' + A' u' + \ldots) dx^2.$$

Or, en vertu des relations $u' dx = du$, $A' dx = dA$, $u'' dx^2 = d^2u$, on peut écrire

$$(4) \qquad d^2y = A\, d^2u + dA\, du + B\, d^2v + dB\, dv + C\, d^2w + dC\, dw,$$

ce qui montre que d^2y s'obtient en différentiant selon les règles ordinaires l'expression (3) de dy, et en écrivant d^2u, d^2v, d^2w, pour les différentielles de du, dv, dw.

29. Remarques. — 1° La différentielle seconde de la variable indépendante x est nulle, car la dérivée seconde de la fonction x est égale à zéro. Ainsi $d^2x = 0$.

2° En vertu de (2), la dérivée seconde, y'', de y par rapport à x, est le quotient de d^2y par dx^2, et s'écrira $\frac{d^2y}{dx^2}$.

3° Soient y et u deux fonctions de x; dy et du leurs différentielles pour le même accroissement dx; on a vu (n° 24) que dy est encore la différentielle de y quand u est pris pour variable indépendante à la place de x, et subit l'accroissement du.

Au contraire la différentielle seconde d^2y ne reste pas la même quand on change la variable indépendante : cela tient à ce que l'on a fait sur cette variable (n° 26) l'hypothèse $dx_1 = dx$, qui n'entraîne pas $du_1 = du$. On devrait donc, pour préciser, écrire d_x^2y ou d_u^2y, en mettant en évidence la variable indépendante.

On peut se rendre compte autrement de ce fait.

Soit

$$y = \varphi(u),$$

u étant fonction de x. On en tire

$$dy = \varphi'(u)\, du;$$

différentions encore les deux membres *en prenant x pour va-*

riable indépendante; il vient, suivant la règle du n° 28,

$$d_x^2 y = \varphi''(u)\,du^2 + \varphi'(u)\,d_x^2 u.$$

D'ailleurs

$$\varphi''(u)\,du^2 = d_u^2 y,$$

en vertu de (2); par suite

$$d_x^2 y = d_u^2 y + \varphi'(u)\,d_x^2 u,$$

ce qui montre bien la non-identité des deux différentielles secondes de y.

30. Différentielles d'ordre supérieur. — En raisonnant sur la différentielle seconde comme on l'a fait sur la différentielle première, et en désignant par $f'''(x)$ la dérivée troisième de $f(x)$, on définit de même la différentielle troisième :

$$d^3 y = f'''(x)\,dx^3,$$

et en général

$$d^n y = f^n(x)\,dx^n.$$

d'où

$$f^n(x) = \frac{d^n y}{dx^n},$$

$f^n(x)$ étant la dérivée d'ordre n de $f(x)$.

Dans le cas d'une fonction composée, on calcule $d^3 y$ en différentiant l'expression (4) de $d^2 y$, et en écrivant $d^3 u$, $d^3 v$, ... pour les différentielles de $d^2 u$, $d^2 v$, ...

Ainsi, si

$$y = \varphi(u),$$

on aura

$$dy = \varphi'(u)\,du; \qquad d^2 y = \varphi''(u)\,du^2 + \varphi'(u)\,d^2 u;$$
$$d^3 y = \varphi'''(u)\,du^3 + 3\varphi''(u)\,du\,d^2 u + \varphi'(u)\,d^3 u; \qquad \ldots.$$

IV. — DÉRIVÉES ET DIFFÉRENTIELLES DES FONCTIONS DE PLUSIEURS VARIABLES.

31. Soit $z = f(x, y)$ une fonction de deux variables *indépendantes;* on désigne par f'_x sa dérivée partielle par rapport à x,

c'est-à-dire la dérivée de $f(x, y)$ lorsque x est regardé comme variable indépendante, et y comme constant. On définit de même f'_y. La dérivée partielle de f'_x par rapport à x s'écrit f''_{x^2}; sa dérivée partielle par rapport à y, f''_{xy}; et l'on définit de même f''_{yx} et f''_{y^2}, ...

32. Théorème. — *On peut intervertir arbitrairement l'ordre des dérivations.*

Montrons d'abord que $f''_{xy} = f''_{yx}$; et, à cet effet, établissons que chacun des deux membres est la limite de l'expression

$$(5) \qquad \frac{f(x+h, y+k) - f(x+h, y) - f(x, y+k) + f(x, y)}{hk},$$

lorsque h et k tendent vers zéro d'une manière quelconque.

Posons

$$f(x, y+k) - f(x, y) = \varphi(x, y);$$

l'expression (5) s'écrit

$$\frac{1}{hk}[\varphi(x+h, y) - \varphi(x, y)],$$

ou, en vertu de la formule des accroissements finis,

$$\frac{1}{k}\varphi'_x(x+\theta h, y),$$

c'est-à-dire

$$\frac{1}{k}[f'_x(x+\theta h, y+k) - f'_x(x+\theta h, y)].$$

Appliquons encore la même formule; cette expression s'écrit

$$f''_{xy}(x+\theta h, y+\theta' k),$$

et sa limite, pour h et k nuls, est bien f''_{xy}, à condition toutefois que f''_{xy} soit continue au point x, y. On établirait de même que (5) a pour limite f''_{yx}, en posant $\varphi_1 = f(x+h, y) - f(x, y)$. Donc $f''_{xy} = f''_{yx}$.

Remarque. — Cette démonstration suppose que l'on peut appliquer aux fonctions φ et φ_1, f'_x et f'_y la formule des accroissements finis : il faut donc que f, f'_x, f'_y soient des fonctions con-

tinues aux environs du point x, y et que f''_{xy}, f''_{yx} soient finies et déterminées en ce point. De plus, comme on l'a dit explicitement, il faut aussi que f''_{xy} et f''_{yx} soient continues au même point.

Généralisation. — Si l'on a plus de deux indices de dérivation, on peut intervertir deux indices consécutifs. Ainsi je dis que

(6) $$f^{\text{v}}_{xyxxy} = f^{\text{v}}_{xxyxy}.$$

Car d'après le théorème ci-dessus

(7) $$f'''_{xyx} = f'''_{xxy},$$

puisque les deux membres, en posant $f'_x = \psi$, sont ψ''_{yx} et ψ''_{xy}. Dérivant maintenant les deux membres de l'identité (7) par rapport à x, puis par rapport à y, on obtient bien la formule (6).

Il en résulte que l'on peut intervertir *arbitrairement* l'ordre des indices de dérivation, car on pourra toujours passer d'un ordre à un autre par une série de permutations effectuées entre deux indices consécutifs.

Le théorème s'étend de lui-même aux fonctions de 3, 4, ... variables indépendantes.

33. **Différentielle première totale.** — Dans la fonction $z = f(x, y)$, donnons à x et y, variables indépendantes, des accroissements h et k; l'accroissement Δz, de z, peut s'écrire

$$\Delta z = f(x+h, y+k) - f(x, y+k) + f(x, y+k) - f(x, y),$$

et, par la formule des accroissements finis,

$$\Delta z = h f'_x(x+\theta h, y+k) + k f'_y(x, y+\theta' k).$$

Si f'_x et f'_y sont continues pour les valeurs x, y des variables, on a

$$f'_x(x+\theta h, y+k) = f'_x(x, y) + \varepsilon,$$
$$f'_y(x, y+\theta' k) = f'_y(x, y) + \varepsilon',$$

ε et ε' étant infiniment petits en même temps que h et k; il vient alors

$$\Delta z = h f'_x + k f'_y + \varepsilon h + \varepsilon' k.$$

Les deux derniers termes sont d'ordre infinitésimal supérieur,

l'un à hf'_x, l'autre à kf'_y, c'est-à-dire que les deux premiers termes donnent la valeur principale de Δz ([1]). Ces deux termes forment ce qu'on nomme la *différentielle première totale* de z, pour les valeurs x, y et les accroissements h et k des variables; on la désigne par dz, de sorte que

$$dz = hf'_x + kf'_y.$$

En particulier si $z = x$, on a

$$f'_y = 0, \qquad f'_x = 1,$$

d'où

$$dx = h,$$

et de même

$$dy = k,$$

c'est-à-dire que les différentielles des variables indépendantes sont égales à leurs accroissements; on peut alors écrire dz :

$$dz = f'_x\,dx + f'_y\,dy. \tag{8}$$

34. Notations diverses. — Les dérivées partielles de $z = f(x, y)$ s'écrivent

$$f'_x \text{ et } f'_y, \text{ ou } z'_x, \; z'_y \qquad (\text{Lagrange}),$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} \text{ et } \frac{\partial f}{\partial y}, \text{ ou } \frac{\partial z}{\partial x}, \; \frac{\partial z}{\partial y} \qquad (\text{Jacobi}).$$

De même les trois dérivées secondes de z seront désignées par

$$z''_{x^2}, \quad z''_{xy}, \quad z''_{y^2} \qquad (\text{Lagrange}),$$

([1]) Si dans l'expression d'une somme infiniment petite Δz qui dépend de deux ou plusieurs infiniment petits h, k, ... indépendants entre eux, on supprime tout terme qui est certainement d'un ordre infinitésimal supérieur à un autre, l'expression restante est ce que l'on peut appeler *valeur principale de* Δz. Par exemple, pour les infiniment petits

$$5h + 2k^2 + 3hk + 4k^3, \qquad 4h^2 + 3hk + 2hk^2, \qquad hk + 6h^2k + 8k^3,$$

les valeurs principales sont respectivement

$$5h + 2k^2, \qquad 4h^2 + 3hk, \qquad hk + 8k^3,$$

car, dans la première expression, $3hk$ est d'ordre supérieur à $5h$, et $4k^3$ d'ordre supérieur à $2k^2$; dans la seconde $2hk^2$ est d'ordre supérieur à $3hk$; dans la troisième $6h^2k$ est d'ordre supérieur à hk.

ou

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \qquad (\text{Jacobi}).$$

En général, la dérivée de z, prise m fois par rapport à x et n fois par rapport à y, s'écrira

$$\frac{\partial^{m+n} z}{\partial x^m\,\partial y^n}.$$

On aura toujours soin, quand il s'agira de dérivées partielles, de prendre la lettre ∂, en réservant le d pour les différentielles totales; on écrira donc

$$(9) \qquad dz = \frac{\partial z}{\partial x}\,dx + \frac{\partial z}{\partial y}\,dy.$$

Pour une fonction, $y = f(x)$, d'une seule variable, la dérivée s'écrira $\frac{dy}{dx}$, parce qu'elle est le quotient de deux différentielles totales; mais pour la fonction $z = f(x, y)$, la dérivée par rapport à x ne saurait s'écrire $\frac{dz}{dx}$, parce qu'elle n'est pas le quotient de la différentielle totale (8) par dx; de là l'utilité, pour éviter toute confusion, de la représenter par $\frac{\partial z}{\partial x}$.

35. Différentielle totale d'une fonction composée. — Soit

$$z = \varphi(u, v, w)$$

une fonction de u, v, w, qui sont eux-mêmes fonctions des variables indépendantes x, y. On aura, par la formule de définition (9) :

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}\,dx + \frac{\partial z}{\partial y}\,dy,$$

et, par la théorie des dérivées :

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial \varphi}{\partial u}\,\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial v}\,\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial w}\,\frac{\partial w}{\partial x},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial \varphi}{\partial u}\,\frac{\partial u}{\partial y} + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

d'où

$$dz = \frac{\partial \varphi}{\partial u}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\,dx + \frac{\partial u}{\partial y}\,dy\right) + \frac{\partial \varphi}{\partial v}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\,dx + \frac{\partial v}{\partial y}\,dy\right) + \ldots,$$

c'est-à-dire

$$dz = \frac{\partial\varphi}{\partial u}du + \frac{\partial\varphi}{\partial v}dv + \frac{\partial\varphi}{\partial w}dw;$$

formule fondamentale dans laquelle les variables indépendantes et leurs différentielles ne figurent pas explicitement : *c'est la même formule que dans le cas d'une seule variable indépendante* [(équation (1), n° 23].

On en déduit, comme au n° 23, quelles que soient les variables indépendantes et quel que soit leur nombre :

$$d(u+v+\ldots) = du + dv + \ldots; \qquad d(uv) = v\,du + u\,dv;$$

$$d(uvw) = vw\,du + uw\,dv + uv\,dw = uvw\left(\frac{du}{u} + \frac{dv}{v} + \frac{dw}{w}\right);$$

$$d\left(\frac{v}{u}\right) = \frac{u\,dv - v\,du}{u^2};$$

$$d(u^m) = mu^{m-1}du.$$

$$d\log u = \frac{du}{u}.$$

Corollaire. — Si des fonctions u, v, w d'un nombre quelconque de variables indépendantes sont liées par la relation

$$0 = \varphi(u, v, w),$$

quelles que soient les valeurs de ces variables, on en déduira, puisque la différentielle du premier membre est évidemment nulle,

$$0 = \frac{\partial\varphi}{\partial u}du + \frac{\partial\varphi}{\partial v}dv + \frac{\partial\varphi}{\partial w}dw,$$

quelles que soient les variables indépendantes et quel que soit leur nombre.

36. Dérivée logarithmique. — Si la relation $\varphi = 0$ peut se mettre sous la forme

$$\frac{U^m V^n}{W^q} = a T^p,$$

U, V, W, T étant fonctions des variables indépendantes et a une constante, on pourra, avant de différentier les deux membres, égaler leurs logarithmes népériens et différentier ensuite, ce qui donne

$$m \log U + n \log V - q \log W = p \log T + \log a,$$

puis

$$m\frac{dU}{U}+n\frac{dV}{V}-q\frac{dW}{W}=p\frac{dT}{T}.$$

37. **Remarque.** — Soit $z=\varphi(u,v)$, u et v étant eux-mêmes des fonctions de x et y; on a trouvé pour dz (n° 35), en regardant x et y comme les variables indépendantes,

$$dz=\frac{\partial\varphi}{\partial u}du+\frac{\partial\varphi}{\partial v}dv.$$

Or c'est précisément le résultat qu'on aurait obtenu de suite en cherchant la valeur de dz dans l'hypothèse où les variables indépendantes seraient u et v.

Par suite, la différentielle totale de z garde la même valeur quand on change de variables indépendantes, pourvu, bien entendu, que les valeurs principales des accroissements des variables anciennes et nouvelles soient correspondantes, c'est-à-dire liées par

$$du=\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy,\qquad dv=\frac{\partial v}{\partial x}dx+\frac{\partial v}{\partial y}dy.$$

38. **Théorème.** — *Si l'on a obtenu, d'une manière quelconque, l'expression de la différentielle totale d'une fonction z, de deux variables indépendantes x et y, sous la forme*

$$dz=P(x,y)\,dx+Q(x,y)\,dy,$$

on a nécessairement

$$P=\frac{\partial z}{\partial x},\qquad Q=\frac{\partial z}{\partial y}.$$

En effet, d'après l'expression (9) de dz, on a

$$dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy=P\,dx+Q\,dy.$$

Cette égalité doit avoir lieu entre les deux derniers membres pour tous les systèmes de valeurs infiniment petites de dx et dy; car, d'après l'hypothèse, x et y, et par suite leurs accroissements, sont indépendants l'un de l'autre. En particulier, faisant $dy=0$ et divisant par dx, il reste $\frac{\partial z}{\partial x}=P$, de même $\frac{\partial z}{\partial y}=Q$.

39. Théorème. — *Si deux fonctions z et u de deux (ou plusieurs) mêmes variables indépendantes ont même différentielle totale, elles ne diffèrent que d'une constante.*

Car la relation

$$dz = du$$

ou

$$\frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy$$

entraîne

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x}, \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial y}.$$

La première équation exprime que la dérivée par rapport à x de la fonction $z - u$ est nulle; cette fonction est donc une constante par rapport à x; de même, en vertu de la seconde équation, c'est une constante par rapport à y; c'est donc une constante absolue. C. Q. F. D.

40. Utilité des différentielles totales. — Supposons qu'on ait un système de m équations entre $m + n$ quantités, qui ne sont d'ailleurs liées par aucune autre relation; par exemple $m = 3$, $n = 2$:

$$(10) \qquad \begin{cases} \varphi(x, y, z, t, u) = 0, \\ \chi(x, y, z, t, u) = 0, \\ \psi(x, y, z, t, u) = 0. \end{cases}$$

Comme il y a cinq quantités et trois équations, deux de ces quantités, x et y, par exemple, pourront être regardées comme variables indépendantes; les trois autres seront des fonctions de celles-là.

Dérivons nos équations, comme on a toujours le droit de le faire, *par rapport aux variables indépendantes x et y*, il vient :

$$(11) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial \varphi}{\partial x} + \dfrac{\partial \varphi}{\partial z}\dfrac{\partial z}{\partial x} + \dfrac{\partial \varphi}{\partial t}\dfrac{\partial t}{\partial x} + \dfrac{\partial \varphi}{\partial u}\dfrac{\partial u}{\partial x} = 0, \\ \dfrac{\partial \varphi}{\partial y} + \dfrac{\partial \varphi}{\partial z}\dfrac{\partial z}{\partial y} + \dots\dots\dots\dots\dots = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{cases}$$

soit en tout *six* équations où figurent les six dérivées partielles $\dfrac{\partial z}{\partial x}, \dfrac{\partial z}{\partial y}; \dfrac{\partial t}{\partial x}, \dfrac{\partial t}{\partial y}; \dfrac{\partial u}{\partial x}, \dfrac{\partial u}{\partial y}$.

Le système (11) peut être remplacé, si l'on emploie les différentielles totales, par un système équivalent formé de *trois* équations seulement; et, *en outre, avec le double et important avantage qu'on n'est pas obligé de choisir, dès le début, les variables indépendantes, ni de s'inquiéter de leur nombre.*

Différentions, en effet, les équations (10); il est inutile, pour cela, de fixer les variables indépendantes, puisque le résultat de la différentiation garde toujours la même forme (n° 35). On a ainsi :

$$(12)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial\varphi}{\partial x}dx + \dfrac{\partial\varphi}{\partial y}dy + \dfrac{\partial\varphi}{\partial z}dz + \dfrac{\partial\varphi}{\partial t}dt + \dfrac{\partial\varphi}{\partial u}du = 0, \\ \dfrac{\partial\chi}{\partial x}dx + \dots\dots\dots\dots\dots\dots = 0, \\ \dfrac{\partial\psi}{\partial x}dx + \dots\dots\dots\dots\dots\dots = 0. \end{cases}$$

Le système (12) est d'ailleurs équivalent au système (11) : Supposons, en effet, que les variables indépendantes soient x et y et faisons $dy = 0$ dans la première équation (12) : dz, dt, du sont alors les valeurs principales des accroissements de z, t, u quand x augmente de dx, y restant constant; leurs quotients par dx sont donc les dérivées de z, t, u par rapport à x. L'équation considérée devient ainsi, après division par dx,

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial\varphi}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial x} + \frac{\partial\varphi}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} = 0,$$

c'est-à-dire la première des équations (11). De même, en faisant, dans la première équation (12), $dx = 0$, on trouverait la seconde équation (11), et ainsi de suite. Le système (12) contient donc le système (11). Il est clair, inversement, que de (11) on peut déduire (12); par exemple en multipliant la première équation (11) par dx, la seconde par dy, et ajoutant, on trouve la première relation (12).

D'ailleurs le système (12) est généralement plus utile que le système (11), principalement en Géométrie, en Physique et en Mécanique où l'on a surtout besoin des relations qui lient les différentielles (ou les accroissements) des quantités variables considérées dans un problème.

41. Différentielle seconde. — Comparons les différentielles dz

et dz_1 d'une fonction $z = f(x, y)$, pour deux systèmes de valeurs x, y et x_1, y_1 des variables :

$$dz = f'_x(x,y)\,dx + f'_y(x,y)\,dy, \quad dz_1 = f'_x(x_1,y_1)\,dx_1 + f'_y(x_1,y_1)\,dy_1.$$

Pour que la comparaison ait un sens, il faut que les infiniment petits dx_1 et dy_1, qui sont arbitraires, soient liés à dx et dy; on fera les hypothèses

$$dx_1 = dx, \qquad dy_1 = dy.$$

Il vient alors

$$(13)\quad dz_1 - dz = [f'_x(x_1,y_1) - f'_x(x,y)]\,dx + [f'_y(x_1,y_1) - f'_y(x,y)]\,dy.$$

Faisons tendre x_1 et y_1 vers x et y, en posant

$$x_1 = x + \delta x, \qquad y_1 = y + \delta y,$$

et cherchons la valeur principale du second membre. La valeur principale de $f'_x(x_1, y_1) - f'_x(x, y)$ est (n° 33)

$$\delta x\, f''_{x^2}(x, y) + \delta y\, f''_{xy}(x, y);$$

celle de $f'_y(x_1, y_1) - f'_y(x, y)$ est de même

$$\delta x\, f''_{yx} + \delta y\, f''_{y^2};$$

il vient ainsi, pour la valeur principale de $(dz_1 - dz)$, l'expression

$$f''_{x^2}\,dx\,\delta x + f''_{xy}(dx\,\delta y + dy\,\delta x) + f''_{y^2}\,dy\,\delta y.$$

On supposera maintenant (hypothèses non indispensables) que

$$\delta x = dx, \qquad \delta y = dy,$$

et l'on désignera par $d^2 z$ (*différentielle seconde*) l'expression précédente, c'est-à-dire la valeur principale de la quantité $dz_1 - dz$, en représentant par dz la différentielle totale qui correspond aux valeurs x, y, et aux accroissements dx, dy, des variables, et par dz_1 la différentielle qui correspond aux valeurs $x + dx$, $y + dy$, et aux accroissements dx, dy, des variables. Ainsi

$$d^2 z = f''_{x^2}\,dx^2 + 2 f''_{xy}\,dx\,dy + f''_{y^2}\,dy^2;$$

ce que l'on écrit aussi, suivant les notations de Jacobi,

$$(14)\qquad d^2 z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\,dx^2 + 2\,\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}\,dx\,dy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\,dy^2.$$

On voit qu'on obtient l'expression (14) de $d^2 z$ en différentiant le second membre de la relation

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy,$$

et en traitant, dans ce calcul, les facteurs dx, dy comme des constantes.

En effet, d'après le n° 33,

$$d\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} dx + \frac{\partial^2 z}{\partial x \, \partial y} dy,$$
$$d\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y \, \partial x} dx + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} dy,$$

et l'on a bien

$$d^2 z = d\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) dx + d\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) dy.$$

C'est ce que l'on résume en disant que $d^2 z$ est la différentielle de dz, lorsque l'on suppose les accroissements dx, dy indépendants de x et y.

D'après la définition, à cause des hypothèses $dx_1 = dx$, $dy_1 = dy$, $d^2 z$ n'est déterminé que si l'on fixe les variables indépendantes dont dépend z; on devrait donc écrire $d^2_{xy} z$, pour préciser (*voir* plus bas, n° 43, Remarque 1°).

Remarque. — Les différentielles secondes des variables indépendantes sont nulles; car, si $z = x$, on a,

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 0, \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x \, \partial y} = 0 \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0,$$

d'où, par (14), $d^2 x = 0$.

42. Différentielle seconde d'une fonction composée. — Soit

$$z = f(u, v, w),$$

une fonction des quantités u, v, w, qui sont elles-mêmes fonctions des variables indépendantes x, y. On a (n° 35)

$$dz = \mathrm{A}\, du + \mathrm{B}\, dv + \mathrm{C}\, dw,$$

en désignant par A, B, C les dérivées $\frac{\partial f}{\partial u}$, $\frac{\partial f}{\partial v}$, $\frac{\partial f}{\partial w}$.

On peut écrire

$$dz = A\left(\frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy\right) + B\left(\frac{\partial v}{\partial x}dx + \frac{\partial v}{\partial y}dy\right) + C\left(\frac{\partial w}{\partial x}dx + \frac{\partial w}{\partial y}dy\right).$$

On a ainsi mis dz sous la forme $P\,dx + Q\,dy$; pour obtenir $d^2_{xy}z$, il faut, d'après la règle du numéro précédent, différentier le second membre, en traitant dans le calcul dx et dy comme des constantes. Il vient ainsi

$$\begin{aligned} d^2_{xy}z = {} & dA\left(\frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy\right) + dB\left(\frac{\partial v}{\partial x}dx + \frac{\partial v}{\partial y}dy\right) + \ldots \\ & + A\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}dx^2 + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}dx\,dy + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}dy^2\right) + \ldots, \end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$(15)\qquad d^2_{xy}z = dA\,du + A\,d^2_{xy}u + dB\,dv + B\,d^2_{xy}v + dC\,dw + C\,d^2_{xy}w.$$

En d'autres termes, d^2z s'obtient en différentiant l'expression $A\,du + B\,dv + C\,dz$, de dz, et en écrivant d^2u, d^2v, d^2w pour les différentielles de du, dv, dw : *c'est la même règle que pour les fonctions composées d'une seule variable.*

Cette règle comprend, comme cas particulier, celle du n° 41 pour le calcul de d^2z, lorsque z est une fonction donnée de x et y, et d'après laquelle on doit différentier dz en regardant dx et dy comme des constantes, c'est-à-dire en écrivant o au lieu de d^2x et d^2y : or d^2x et d^2y sont effectivement nuls (Remarque du n° 41).

On peut donner une autre forme à la formule (15). On a

$$A = \frac{\partial z}{\partial u},\qquad B = \frac{\partial z}{\partial v},\qquad C = \frac{\partial z}{\partial w},$$

$$dA = \frac{\partial^2 z}{\partial u^2}du + \frac{\partial^2 z}{\partial u\,\partial v}dv + \frac{\partial^2 z}{\partial u\,\partial w}dw,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

ce qui donne, dans (15)

$$(16)\qquad \left\{\begin{aligned} d^2z = {} & \frac{\partial^2 z}{\partial u^2}du^2 + \frac{\partial^2 z}{\partial v^2}dv^2 + \frac{\partial^2 z}{\partial w^2}dw^2 \\ & + 2\frac{\partial^2 z}{\partial u\,\partial v}du\,dv + 2\frac{\partial^2 z}{\partial u\,\partial w}du\,dw \\ & + 2\frac{\partial^2 z}{\partial v\,\partial w}dv\,dw + \frac{\partial z}{\partial u}d^2u + \frac{\partial z}{\partial v}d^2v + \frac{\partial z}{\partial w}d^2w, \end{aligned}\right.$$

formule où les variables indépendantes ne figurent pas explicitement.

43. Remarques. — 1° Lorsqu'aux variables indépendantes, x et y, on substitue d'autres variables, u et v, $d^2 z$ change de valeur; car si l'on part de l'équation

$$dz = \frac{\partial z}{\partial u}\,du + \frac{\partial z}{\partial v}\,dv,$$

et si l'on différentie les deux membres en prenant x et y comme variables indépendantes, il vient en appliquant la règle du n° **42** :

$$d^2_{xy} z = \frac{\partial^2 z}{\partial u^2}\,du^2 + 2\frac{\partial^2 z}{\partial u\,\partial v}\,du\,dv + \frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\,dv^2 + \frac{\partial z}{\partial u}\,d^2_{xy} u + \frac{\partial z}{\partial v}\,d^2_{xy} v.$$

On peut écrire

$$d^2_{xy} z = d^2_{uv} z + \frac{\partial z}{\partial u}\,d^2_{xy} u + \frac{\partial z}{\partial v}\,d^2_{xy} v,$$

et l'on voit bien que $d^2_{xy} z$ et $d^2_{uv} z$ ne sont pas identiques.

Mais il importe de remarquer que si z est une fonction composée $z = f(u, v, w)$, la différentielle seconde, $d^2 z$, donnée par (16), garde *la même forme* quelles que soient les variables indépendantes : cela tient à ce que ces variables ne figurent pas explicitement dans le second membre de (16). Il en résulte ce grand avantage de la notation différentielle que si l'on a une équation

$$\varphi(u, v, w) = 0,$$

entre des fonctions u, v, w des variables indépendantes, on pourra écrire, en différentiant deux fois,

$$(16\ bis)\quad \left\{\begin{aligned} 0 = {} & \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u^2}\,du^2 + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial v^2}\,dv^2 + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial w^2}\,dw^2 \\ & + 2\frac{\partial^2 \varphi}{\partial u\,\partial v}\,du\,dv + 2\frac{\partial^2 \varphi}{\partial u\,\partial w}\,du\,dw \\ & + 2\frac{\partial^2 \varphi}{\partial v\,\partial w}\,dv\,dw + \frac{\partial \varphi}{\partial u}\,d^2 u + \frac{\partial \varphi}{\partial v}\,d^2 v + \frac{\partial \varphi}{\partial w}\,d^2 w, \end{aligned}\right.$$

quelles que soient les variables indépendantes et quel que soit leur nombre. Si, dans la suite des calculs, on avait avantage à prendre u, par exemple, pour une des variables indépendantes, on n'aurait qu'à faire dans la formule $d^2 u = 0$.

L'extension des formules (14), (16) et (16 *bis*) à un nombre quelconque de fonctions composantes, u, v, w, ou de variables indépendantes, est immédiate.

2° La dérivée seconde partielle $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ n'est pas le quotient de la différentielle seconde, $d^2 z$, par le carré de dx; la formule

$$d^2 z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\,dx^2 + 2\,\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}\,dx\,dy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\,dy^2$$

le montre immédiatement. Même observation pour $\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$, et de là encore l'utilité, pour éviter toute confusion, d'employer la lettre ∂ dans les dérivées partielles.

44. Différentielles d'ordre supérieur. — En raisonnant sur la différentielle seconde $d^2 z$, comme on l'a fait sur dz, on définit la différentielle troisième $d^3 z$ d'une fonction z, de deux variables indépendantes x et y : celle-ci s'obtient en différentiant l'expression de $d^2 z$ et en traitant, dans ce calcul, dx et dy comme des constantes. Ainsi, de la relation

$$d^2 z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\,dx^2 + 2\,\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}\,dx\,dy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\,dy^2,$$

on déduit

$$d^3_{xy} z = d\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right)dx^2 + 2\,d\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}\right)dx\,dy + d\left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right)dy^2.$$

Or

$$d\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right) = \frac{\partial^3 z}{\partial x^3}\,dx + \frac{\partial^3 z}{\partial x^2\,\partial y}\,dy,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

en désignant par $\frac{\partial^3 z}{\partial x^3}$ la dérivée troisième de z par rapport à x, par $\frac{\partial^3 z}{\partial x^2\,\partial y}$ la dérivée troisième prise deux fois par rapport à x et une fois par rapport à y, ...

On en déduit

$$d^3 z = \frac{\partial^3 z}{\partial x^3}\,dx^3 + 3\,\frac{\partial^3 z}{\partial x^2\,\partial y}\,dx^2\,dy + 3\,\frac{\partial^3 z}{\partial x\,\partial y^2}\,dx\,dy^2 + \frac{\partial^3 z}{\partial y^3}\,dy^3.$$

On aurait de même $d^4 z$, et ainsi de suite.

La loi de formation est évidente; les coefficients sont ceux du

binome, de sorte qu'en général

$$(17)\quad \left\{\begin{aligned} d^n z &= \frac{\partial^n z}{\partial x^n}dx^n + n\frac{\partial^n z}{\partial x^{n-1}\partial y}dx^{n-1}dy \\ &+ \frac{n(n-1)}{1.2}\frac{\partial^n z}{\partial x^{n-2}\partial y^2}dx^{n-2}dy^2 + \ldots \end{aligned}\right.$$

Pour établir cette formule, vérifiée pour $n = 1$ et $n = 2$, montrons que si elle est vraie pour une valeur n, elle est vraie pour $n+1$. A cet effet, différentions (17) en traitant, dans le calcul, selon la règle, dx et dy comme des constantes; il vient

$$(18)\quad d^{n+1}z = \left(\frac{\partial^{n+1} z}{\partial x^{n+1}}dx + \frac{\partial^{n+1} z}{\partial x^n \partial y}dy\right)dx^n + \ldots$$

On voit que le coefficient du terme en $\frac{\partial^{n+1} z}{\partial x^{p+1}\partial y^{n-p}}dx^{p+1}dy^{n-p}$ est la somme de deux coefficients consécutifs du second membre de (17), à savoir ceux des termes en $\frac{\partial^n z}{\partial x^{p+1}\partial y^{n-p-1}}$ et $\frac{\partial^n z}{\partial x^p \partial y^{n-p}}$, coefficients qui, dans la notation des combinaisons, se représentent par C_n^{p+1} et C_n^p. Or on a (*Cours de Mathématiques spéciales*)

$$C_n^{p+1} + C_n^p = C_{n+1}^{p+1},$$

ce qui démontre le théorème.

Il est clair que pour les variables indépendantes, en vertu de (17), $d^2x = d^2y = d^3x = \ldots = d^n x = d^n y = 0$.

On écrit souvent la formule (17) sous la forme d'une puissance symbolique

$$d^n z = \left(\frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy\right)^n,$$

en convenant de développer le second membre suivant la formule du binome et de remplacer les expressions

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^\alpha \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^\beta \quad \text{par} \quad \frac{\partial^{\alpha+\beta} z}{\partial x^\alpha \partial y^\beta}.$$

De même, s'il y a plus de deux variables indépendantes, $d^n z$ sera donnée par la formule symbolique

$$d^n z = \left(\frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy + \frac{\partial z}{\partial t}dt + \ldots\right)^n.$$

45. Différentielles successives d'une fonction composée. — Les

différentielles successives d'une fonction composée $z = f(u, v)$ s'obtiennent (n° 42) en différentiant une, deux, trois, ... fois la relation

$$dz = \frac{\partial z}{\partial u} du + \frac{\partial z}{\partial v} dv,$$

et en écrivant $d^2 u$, $d^3 u$, ..., pour les différentielles successives de du, $d^2 u$, ... La démonstration est la même que celle donnée au n° 42 pour $d^2 z$.

On obtiendra ainsi l'expression de $d^n z$ en fonction de

$$du, \quad dv, \quad d^2 u, \quad d^2 v, \quad \ldots, \quad d^n u, \quad d^n v,$$

toutes ces différentielles correspondant, bien entendu, au même choix des variables indépendantes.

46. Différentielles successives d'un produit. — En particulier, soit la fonction composée

$$z = uv,$$

on a

$$dz = u\,dv + v\,du,$$
$$d^2 z = u\,d^2 v + 2\,du\,dv + v\,d^2 u,$$

et en général

$$d^n z = u\,d^n v + n\,du\,d^{n-1} v + \frac{n(n-1)}{1.2} d^2 u\,d^{n-2} v + \ldots,$$

les coefficients étant ceux du binome. On établit cette formule par la méthode du n° 44; elle est due à Leibniz.

47. Théorème. — *Si l'on a obtenu d'une manière quelconque l'expression de la différentielle seconde d'une fonction z, de deux variables indépendantes x et y, sous la forme*

$$d^2 z = A\,dx^2 + 2B\,dx\,dy + C\,dy^2,$$

on a nécessairement

$$A = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \qquad B = \frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}, \qquad C = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}.$$

Car les deux expressions de $d^2 z$:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} dx^2 + 2 \frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} dx\,dy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} dy^2$$

et

$$A\,dx^2 + 2B\,dx\,dy + C\,dy^2,$$

doivent être égales quels que soient x, y, dx et dy.

L'extension à d^3z, d^4z, ..., et à un nombre quelconque de variables indépendantes, est immédiate.

48. Dans le cas particulier d'une fonction z, de *deux* variables indépendantes x et y, on fait souvent usage des notations suivantes, qu'il est utile de connaître. On pose

$$\frac{\partial z}{\partial x} = p, \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = q,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial p}{\partial x} = r, \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} = \frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial q}{\partial x} = s, \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial q}{\partial y} = t.$$

On a ainsi

$$dz = p\,dx + q\,dy,$$
$$d^2z = r\,dx^2 + 2s\,dx\,dy + t\,dy^2.$$

L'équation $z = f(x, y)$ représente une surface; en un point de cette surface (x, y, z), on sait que le plan tangent a pour équation

$$Z - z = f'_x(X - x) + f'_y(Y - y),$$

ou, avec les notations ci-dessus,

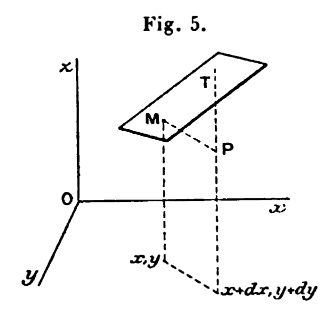
$$Z - z = p(X - x) + q(Y - y).$$

Remarque. — Soit $M(x, y, z)$ un point de la surface

$$z = f(x, y);$$

désignons par T (*fig.* 5) le point du plan tangent en M qui a pour

Fig. 5.



coordonnées $x + dx$, $y + dy$; le z de ce point sera, d'après

l'équation du plan tangent,

$$\zeta = z + p\,dx + q\,dy.$$

D'où

$$\zeta - z = \mathrm{TP} = p\,dx + q\,dy,$$

c'est-à-dire dz.

Donc la différentielle dz est rigoureusement égale à l'accroissement de l'ordonnée z, quand on passe du point $M(x, y)$ sur la surface au point voisin $T(x + dx, y + dy)$ sur le plan tangent en M (axes rectangulaires ou obliques).

On en déduirait, comme dans le cas des fonctions d'une seule variable, une définition ou interprétation géométrique de la différentielle seconde $d^2 z$.

V. — DÉTERMINANTS FONCTIONNELS.

---

49. Définition; première propriété. — Soient n fonctions de n variables indépendantes, $n = 3$ par exemple :

$$u = f_1(x, y, z), \qquad v = f_2(x, y, z), \qquad w = f_3(x, y, z).$$

On nomme *déterminant fonctionnel* ou *jacobien* de ces fonctions le déterminant de leurs dérivées partielles

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{vmatrix},$$

et on le désigne souvent par la notation $\frac{\partial(u, v, w)}{\partial(x, y, z)}$. Cette notation est justifiée par ce fait que le jacobien joue, dans la théorie des fonctions de plusieurs variables, un rôle analogue à celui de la dérivée dans celle des fonctions d'une variable.

La *première propriété* du jacobien est la généralisation de la

formule qui donne la dérivée d'une fonction de fonction

$$\frac{du}{d\xi} = \frac{du}{dx}\frac{dx}{d\xi},$$

u étant fonction de x et x fonction de ξ. Pour le jacobien, on a la formule analogue

$$\frac{\partial(u, v, w)}{\partial(\xi, \eta, \zeta)} = \frac{\partial(u, v, w)}{\partial(x, y, z)}\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(\xi, \eta, \zeta)}, \tag{19}$$

en supposant que u, v, w soient des fonctions de x, y, z et que x, y, z soient eux-mêmes des fonctions de trois autres variables indépendantes ξ, η, ζ.

Cette formule, en effet, n'est autre, par définition, que celle-ci

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial \xi} & \frac{\partial u}{\partial \eta} & \frac{\partial u}{\partial \zeta} \\ \frac{\partial v}{\partial \xi} & \frac{\partial v}{\partial \eta} & \frac{\partial v}{\partial \zeta} \\ \frac{\partial w}{\partial \xi} & \frac{\partial w}{\partial \eta} & \frac{\partial w}{\partial \zeta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial x}{\partial \zeta} \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \zeta} \\ \frac{\partial z}{\partial \xi} & \frac{\partial z}{\partial \eta} & \frac{\partial z}{\partial \zeta} \end{vmatrix}. \tag{20}$$

Or on a, d'après la théorie des dérivées,

$$\frac{\partial u}{\partial \xi} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial \xi},$$

et des expressions semblables pour $\frac{\partial u}{\partial \eta}, \frac{\partial u}{\partial \zeta}, \frac{\partial v}{\partial \xi}, \dots, \frac{\partial w}{\partial \zeta}$. Si l'on porte ces valeurs dans le premier des trois déterminants (20), on obtient un déterminant, qui, en vertu d'une règle connue, est le produit du second et du troisième déterminants (20) : la formule (19) est donc vérifiée.

50. Corollaire. — Si u, v, w sont des fonctions de x, y, z, on peut inversement considérer x, y, z comme fonctions de u, v, w, c'est-à-dire que, pour les variables ξ, η, ζ du numéro précédent, on peut prendre u, v, w. Faisons donc, dans la formule (20), $\xi = u$, $\eta = v$, $\zeta = w$: le premier membre se réduit au déterminant

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1,$$

et il reste

$$\frac{\partial(u, v, w)}{\partial(x, y, z)} \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} = 1;$$

c'est-à-dire que le jacobien de u, v, w par rapport à x, y, z est l'inverse du jacobien de x, y, z par rapport à u, v, w.

51. **Seconde propriété.** — *La condition nécessaire et suffisante pour que n fonctions de n variables indépendantes soient liées par une relation est que leur jacobien, par rapport à ces variables, soit nul.*

Soient par exemple les trois fonctions de trois variables :

$$u = f_1(x, y, z), \qquad v = f_2(x, y, z), \qquad w = f_3(x, y, z);$$

je dis que la condition énoncée $\left[\frac{\partial(u, v, w)}{\partial(x, y, z)} = 0\right]$ est nécessaire et suffisante.

1° En effet, si u, v, w sont liées par une relation

$$\varphi(u, v, w) = 0,$$

où ne figure, bien entendu, explicitement aucune des variables x, y, z, on en déduit, en dérivant successivement par rapport aux trois variables indépendantes x, y, z :

$$(21) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial\varphi}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial\varphi}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial\varphi}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial x} &= 0, \\ \frac{\partial\varphi}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial\varphi}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial\varphi}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial y} &= 0, \\ \frac{\partial\varphi}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial\varphi}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial\varphi}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial z} &= 0, \end{aligned} \right.$$

c'est-à-dire trois équations linéaires et homogènes en $\frac{\partial\varphi}{\partial u}$, $\frac{\partial\varphi}{\partial v}$, $\frac{\partial\varphi}{\partial w}$: comme la fonction φ contient, par hypothèse, une au moins des quantités u, v, w, les trois dérivées partielles $\frac{\partial\varphi}{\partial u}$, $\frac{\partial\varphi}{\partial v}$, $\frac{\partial\varphi}{\partial w}$ ne sont pas nulles simultanément, ce qui exige que le déterminant de leurs coefficients, dans le système (21), soit identiquement nul. Ce déterminant étant précisément le jacobien $\frac{\partial(u, v, w)}{\partial(x, y, z)}$, la condition énoncée est *nécessaire*.

2° Elle est *suffisante* : car, dire que le déterminant jacobien

est nul, c'est dire qu'on peut déterminer trois fonctions α, β, γ de x, y, z, non nulles simultanément et vérifiant les relations

$$\alpha \frac{\partial u}{\partial x} + \beta \frac{\partial v}{\partial x} + \gamma \frac{\partial w}{\partial x} = 0,$$
$$\alpha \frac{\partial u}{\partial y} + \beta \frac{\partial v}{\partial y} + \gamma \frac{\partial w}{\partial y} = 0,$$
$$\alpha \frac{\partial u}{\partial z} + \beta \frac{\partial v}{\partial z} + \gamma \frac{\partial w}{\partial z} = 0.$$

Multiplions la première de ces relations par dx, la seconde par dy, la troisième par dz, et ajoutons membre à membre; il vient

$$(22) \qquad \alpha\, du + \beta\, dv + \gamma\, dw = 0,$$

et je dis que cette équation (22) établit que u, v, w ne sont pas indépendants l'un de l'autre, c'est-à-dire sont liés par une relation. En effet, si u, v, w étaient indépendants, on pourrait les prendre comme variables indépendantes à la place de x, y, z, de sorte que leurs différentielles totales (ou accroissements) du, dv, dw seraient absolument arbitraires; du, dv, dw seraient donc indépendants entre eux et indépendants aussi des valeurs de x, y, z, u, v, w, c'est-à-dire qu'aucune équation telle que (22) ne pourrait avoir lieu. L'existence d'une telle équation entraîne donc la conséquence que u, v, w sont liés par une relation $\varphi(u, v, w) = 0$.

C. Q. F. D.

Exemple. — Les fonctions de deux variables indépendantes

$$u = xy, \qquad v = \log x + \log y$$

sont liées par une relation, car leur jacobien est nul :

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y & x \\ \frac{1}{x} & \frac{1}{y} \end{vmatrix} = 0.$$

On a effectivement $v = \log u$, comme on le voyait *a priori*.

52. On démontre d'une manière absolument pareille le théorème plus général suivant :

La condition nécessaire et suffisante pour que n fonctions,

$u_1, u_2, \ldots, u_n$, *de* $n+p$ *variables indépendantes* $x_1, x_2, \ldots, x_{n+p}$, *soient liées par une relation est que tous les déterminants d'ordre n formés avec n colonnes quelconques du tableau*

$$\begin{array}{llll}
\dfrac{\partial u_1}{\partial x_1}, & \dfrac{\partial u_1}{\partial x_2}, & \ldots, & \dfrac{\partial u_1}{\partial x_{n+p}}, \\
\dfrac{\partial u_2}{\partial x_1}, & \ldots, & \ldots, & \ldots\ldots, \\
\ldots, & \ldots\ldots, & \ldots\ldots, & \ldots\ldots, \\
\dfrac{\partial u_n}{\partial x_1}, & \dfrac{\partial u_n}{\partial x_2}, & \ldots, & \dfrac{\partial u_n}{\partial x_{n+p}},
\end{array}$$

soient identiquement nuls.

CHAPITRE II.

PREMIERS EXEMPLES GÉOMÉTRIQUES D'INFINIMENT PETITS.

---

53. Formule de Taylor. — On aura besoin, pour certains développements d'infiniment petits, de la formule de Taylor, établie dans le cours de Mathématiques spéciales, et qu'on va rappeler ici.

Soit $f(x)$ une fonction d'une variable réelle x, qui soit continue et déterminée, ainsi que ses $(n-1)$ premières dérivées, entre $x=a$ et $x=b$; supposons de plus que, dans le même intervalle, la dérivée d'ordre n existe et soit déterminée; on aura, si x et $x+h$ sont compris entre a et b,

$$f(x+h)=f(x)+hf'(x)+\ldots+\frac{h^{n-1}}{(n-1)!}f^{n-1}(x)+\mathrm{R}_n,$$

le reste R_n ayant pour expression

$$\mathrm{R}_n=\frac{(1-\theta)^{n-p}}{p.1.2\ldots(n-1)}h^n f^n(x+\theta h),$$

p désignant un entier positif qu'on peut choisir arbitrairement, et θ un nombre compris entre o et 1 qui dépend de p, de x et de h, et dont la valeur exacte est inconnue.

En faisant $p=n$ et $p=1$, on obtient les formes du reste dues à Lagrange et à Cauchy

$$\mathrm{R}_n=\frac{h^n}{n!}f^n(x+\theta h),\qquad \mathrm{R}_n=\frac{(1-\theta')^{n-1}}{(n-1)!}h^n f^n(x+\theta' h).$$

Si dans la formule de Taylor on fait $x=0$ et si l'on écrit ensuite x à la place de h, on a la formule de *Maclaurin* :

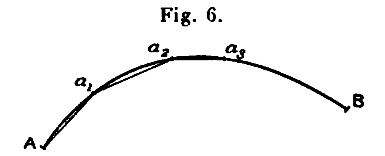
$$f(x)=f(0)+xf'(0)+\ldots+\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}f^{n-1}(0)+\mathrm{R}_n;$$

$$\mathrm{R}_n=\frac{(1-\theta)^{n-p}}{p.1.2\ldots(n-p)}x^n f^n(\theta x).$$

54. Élément d'arc. — C'est un infiniment petit dont le rôle est considérable en Géométrie.

Définissons d'abord la longueur d'un arc de courbe plane AB. Marquons sur l'arc, en allant de A vers B (*fig.* 6), des points suc-

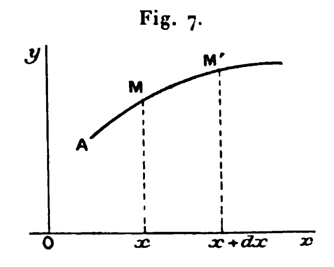
Fig. 6.



cessifs $A, a_1, a_2, a_3, \ldots, B$ et considérons le périmètre du polygone $A a_1 a_2 a_3 \ldots B$; nous établirons plus tard (Calcul intégral) que ce périmètre tend vers une limite quand le nombre des points de division augmente indéfiniment, de manière que tous les côtés du polygone tendent vers zéro; cette limite, indépendante du mode de division, se nomme la *longueur de l'arc* AB.

Admettons provisoirement ce résultat; soit s la longueur d'un arc AM, cherchons sa différentielle ds, c'est-à-dire la valeur

Fig. 7.

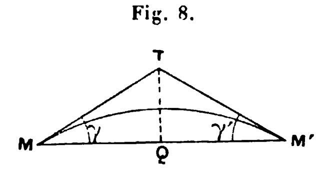


principale de l'*élément d'arc* MM', M' étant infiniment voisin de M (*fig.* 7).

Je dis que cette valeur principale est la même que celle de la corde MM'.

Menons, en effet, les tangentes en M et M' à l'arc (*fig.* 8); le

Fig. 8.



périmètre de tout polygone inscrit dans l'arc convexe MM' est

inférieur au périmètre de la ligne enveloppante MT + TM′ qui a mêmes extrémités, et supérieur à la corde MM′. En passant à la limite, on a

$$\text{corde MM}' < \text{arc MM}' < \text{MT} + \text{TM}';$$

ou, en abaissant TQ perpendiculaire sur la corde et désignant par γ et γ' les angles des tangentes et de la corde,

$$\text{corde MM}' < \text{arc MM}' < \frac{\text{MQ}}{\cos\gamma} + \frac{\text{M}'\text{Q}}{\cos\gamma'}.$$

Or γ et γ' ont pour limites zéro quand M′ tend vers M, car la tangente est la limite de la corde; la valeur principale du dernier membre est donc MQ + M′Q, c'est-à-dire la corde MM′. Il en résulte que arc MM′, compris entre deux quantités dont la valeur principale est *corde* MM′ a lui-même pour valeur principale *corde* MM′. C. Q. F. D.

Corollaire. — On a démontré, en même temps, qu'un arc infiniment petit MM′ a même valeur principale que la somme des tangentes extrêmes MT + M′T.

55. Expressions diverses de l'élément d'arc. — Soient x, y les coordonnées de M; $x + dx$ et $y + \Delta y$ celles de M′. On a, *en coordonnées cartésiennes rectangulaires* (*fig.* 7),

$$\overline{\text{MM}'}^2 = dx^2 + \overline{\Delta y}^2;$$

donc, puisque la valeur principale de $\overline{\Delta y}^2$ est dy^2,

$$ds^2 = dx^2 + dy^2; \qquad ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}. \tag{1}$$

On écrit aussi, en mettant l'infiniment petit dx en évidence,

$$ds = dx\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = dx\sqrt{1 + y'^2}, \tag{2}$$

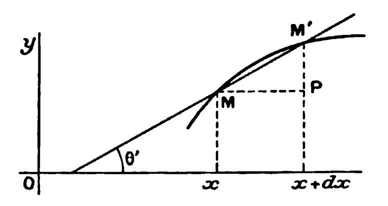
y' désignant la dérivée de l'ordonnée y de la courbe considérée par rapport à l'abscisse x.

56. Remarque. — Soit θ' (*fig.* 9) l'angle que forme la corde MM′ dirigée de M vers M′ avec Ox, dirigé de O vers x; on a, sur la figure,

$$\text{MP} = \text{MM}'\cos\theta', \qquad \text{M}'\text{P} = \text{MM}'\sin\theta'.$$

En passant à la limite, la valeur principale de MM′ est ds;

Fig. 9.



celles de MP et M′P sont dx et dy; celle de θ' est l'angle θ de la tangente avec Ox; donc on a :

$$dx = ds\cos\theta, \qquad dy = ds\sin\theta,$$

formules souvent utiles.

57. En coordonnées polaires, les formules de transformation sont

$$x = \rho\cos\omega,$$
$$y = \rho\sin\omega,$$

d'où

$$dx = d\rho\cos\omega - \rho\sin\omega\,d\omega,$$
$$dy = d\rho\sin\omega + \rho\cos\omega\,d\omega.$$

On en conclut, en portant dans (1),

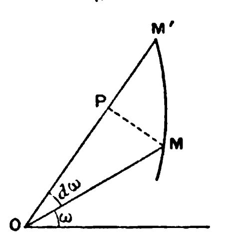
(3) $$ds^2 = dx^2 + dy^2 = d\rho^2 + \rho^2 d\omega^2 \quad \text{ou} \quad ds = d\omega\sqrt{\rho^2 + \rho'^2}.$$

ρ' désignant la dérivée, $\frac{d\rho}{d\omega}$, de ρ par rapport à ω.

Cette formule peut s'établir directement.

Menons, en effet, les rayons vecteurs des deux points voisins M

Fig. 10.



et M′ (*fig.* 10); abaissons MP normal à OM′. On a

$$\overline{MM'}^2 = \overline{MP}^2 + \overline{PM'}^2.$$

Prenons ω pour variable indépendante, l'angle MOM' est $d\omega$; soient

$$OM = \rho, \qquad OM' = \rho + \Delta\rho.$$

Il vient, avec ces notations,

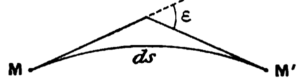
$$MP = \rho \sin(d\omega), \qquad PM' = OM' - OP = \rho + \Delta\rho - \rho\cos(d\omega).$$

Comme $\Delta\rho$ est du même ordre que $d\omega$ (n° 20), la valeur principale de PM', c'est-à-dire de $\rho + \Delta\rho - \rho\left(1 - \frac{1}{2}d\omega^2 + \ldots\right)$ est celle de $\Delta\rho$ ou $d\rho$; la valeur principale de MP, ou $\rho \sin d\omega$, est $\rho\, d\omega$, et par suite,

$$\text{valeur principale } \overline{MM'}^2 = \rho^2 d\omega^2 + d\rho^2. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

58. Courbure d'un élément d'arc plan. — Soit MM' un arc de courbe plane infiniment petit, de longueur ds; désignons par ε l'*angle de contingence* de cet arc, c'est-à-dire l'angle infiniment petit que forment les tangentes à ses deux extrémités (*fig.* 11).

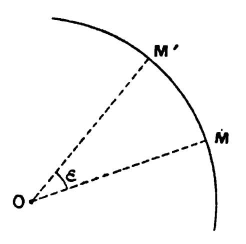
Fig. 11.



On appelle *courbure de l'élément* MM' la limite du rapport $\frac{\varepsilon}{ds}$, lorsque, le point M restant fixe, la longueur ds tend vers zéro. Cette limite se nomme aussi *courbure de la courbe* considérée au point M.

59. Courbure d'une circonférence. — Pour un arc de cercle MM', de rayon R et de centre O (*fig.* 12), l'angle de contingence est

Fig. 12.



évidemment égal à l'angle au centre MOM ; comme on a rigou-

reusement

$$\text{arc}\,MM' = R\varepsilon,$$

on voit que la courbure, $\frac{\varepsilon}{\text{arc}\,MM'}$, est constante et égale à l'inverse du rayon.

60. Courbure d'une courbe quelconque. — Soit k la courbure en un point x, y d'une courbe plane représentée, en coordonnées rectangulaires, par $y = f(x)$; par définition,

$$k = \lim \frac{\varepsilon}{ds}.$$

Or ε est l'angle de la tangente en $M(x, y)$, de coefficient angulaire $f'(x)$, avec la tangente en $M'(x + dx, y + \Delta y)$, de coefficient angulaire $f'(x + dx)$; on a donc

$$\text{tang}\,\varepsilon = \frac{f'(x+dx) - f(x)}{1 + f'(x)f'(x+dx)} = \frac{f' + dx\,f''(x) + \frac{1}{2}dx^2 f'''(x) + \ldots - f'}{1 + f'(x)f'(x+dx)},$$

et, en remplaçant chaque terme par sa valeur principale,

$$\text{valeur principale de } \varepsilon = \frac{dx\,f''(x)}{1 + f'^2(x)}.$$

D'ailleurs on a vu que

$$ds = dx\sqrt{1 + f'^2(x)},$$

il en résulte

$$k = \frac{\varepsilon}{ds} = \frac{f''(x)}{[1 + f'^2(x)]^{\frac{3}{2}}}.$$

On écrit aussi

$$(4) \qquad k = \frac{y''}{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}},$$

y', y'' étant les dérivées de l'ordonnée y de la courbe considérée, par rapport à l'abscisse x.

61. Cercle de courbure. — On nomme *cercle de courbure* en un point M d'une courbe plane le cercle tangent en M à la courbe et qui a même courbure que celle-ci au point M. On suppose de plus qu'en M la convexité du cercle est tournée dans le même sens que celle de la courbe.

D'après ce qu'on a dit sur la courbure d'une circonférence, le

rayon R du cercle de courbure est $\frac{1}{k}$; c'est-à-dire que

$$(5) \qquad R = \frac{ds}{\varepsilon} = \frac{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''}.$$

La quantité R se nomme le *rayon de courbure de la courbe* au point M.

Le centre du cercle est dit *centre de courbure de la courbe* en M; il jouit d'une importante propriété géométrique.

Fig. 13.

M′ M ε O′

La normale à la courbe en M et la normale en un point M′, infiniment voisin, se coupent (*fig.* 13) en un point O′ et font entre elles un angle évidemment égal à l'angle de contingence ε de l'arc MM′; le triangle MO′M′ donne

$$\frac{O'M}{\sin M'} = \frac{MM'}{\sin \varepsilon},$$

d'où, en passant à la limite et observant que la limite de l'angle M′ est évidemment $\frac{\pi}{2}$, et par suite que celle de sin M′ est l'unité,

$$\lim O'M = \frac{ds}{\varepsilon} = R.$$

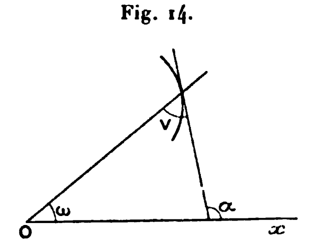
En d'autres termes, la position limite du point O′, où la normale en M′ coupe la normale en M, est le centre de courbure de la courbe en M, car le centre de courbure est sur la normale en M, à une distance R de M et *du même côté de* M *que le point* O′. Sous une autre forme :

Le centre de courbure en M *est le point où la normale en* M *touche la courbe enveloppe des normales.*

L'enveloppe des normales à une courbe plane se nomme la *développée* de celle-ci; inversement, la première courbe est une *développante* de la seconde.

62. Rayon de courbure en coordonnées polaires. — Soient V et α (*fig.* 14) les angles de la tangente en un point d'une courbe

Fig. 14.



avec le rayon vecteur et avec l'axe polaire. On a

$$\alpha = V + \omega,$$

et l'on sait, si $\rho = f(\omega)$ est l'équation polaire de la courbe, que

$$\operatorname{tang} V = \frac{\rho}{\rho'}.$$

L'angle de contingence est évidemment $\Delta\alpha$; l'élément d'arc étant (n° 57)

$$ds = d\omega\sqrt{\rho^2 + \rho'^2},$$

on a, pour le rayon de courbure,

$$R = \frac{ds}{d\alpha} = \frac{d\omega\sqrt{\rho^2 + \rho'^2}}{d\omega + dV}.$$

Or

$$V = \operatorname{arc\,tang} \frac{\rho}{\rho'}, \qquad dV = \frac{\frac{1}{\rho'^2}(\rho'^2 - \rho\rho'')}{1 + \frac{\rho^2}{\rho'^2}} d\omega = \frac{\rho'^2 - \rho\rho''}{\rho^2 + \rho'^2} d\omega,$$

d'où

$$R = \frac{(\rho^2 + \rho'^2)^{\frac{3}{2}}}{\rho^2 + 2\rho'^2 - \rho\rho''}.$$

63. Remarque. — Par définition, la courbure et le rayon de courbure sont des quantités essentiellement positives; dans la

formule

$$(5) \qquad R = \frac{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''},$$

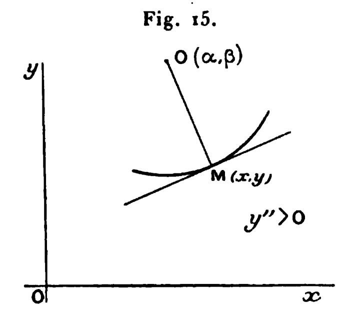
on devra donc prendre devant le radical le signe convenable pour que R soit positif.

C'est pourquoi on écrit souvent, en mettant le signe $\pm$ en évidence,

$$R = \pm \frac{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''}.$$

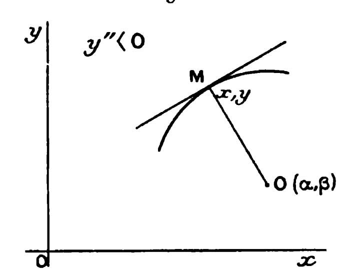
On peut toutefois donner un signe au rayon de courbure en faisant la convention de prendre $(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}$ positivement dans la formule (5) : le signe de R est alors celui de y''. Or $y'' > 0$ (*fig.* 15)

Fig. 15.



indique, comme on sait, que la courbe tourne sa concavité en M vers les y positifs ; en ce cas, le centre de courbure O est au-dessus de la tangente, et R (qui est > 0) doit être porté sur la nor-

Fig. 16.



male en M du côté des y positifs. Si, au contraire, $y'' < 0$ (*fig.* 16), R (qui est < 0) doit être porté du côté des y négatifs.

En d'autres termes, avec la convention admise, les rayons de courbure positifs sont portés sur la normale à partir du pied, dans le sens des y positifs; les rayons négatifs le sont dans le sens des y négatifs.

64. Distance d'un point d'une courbe à la tangente voisine. — Soit x, y un point M d'une courbe; la tangente en M a pour équation

$$Y - y - y'(X - x) = 0. \tag{6}$$

La distance à cette tangente du point $M'(x + dx, y + \Delta y)$, infiniment voisin de M sur la courbe, est

$$\frac{\Delta y - y'\,dx}{\sqrt{1 + y'^2}}.$$

Or

$$\Delta y = y(x + dx) - y(x) = y'\,dx + \frac{1}{2}y''\,dx^2 + \frac{1}{6}y'''\,dx^3 + \ldots,$$

ce qui donne pour valeur principale, δ, de la distance considérée

$$\delta = \frac{1}{2}y''\frac{dx^2}{\sqrt{1 + y'^2}}.$$

Cette valeur est du second ordre, comme on devait s'y attendre (n° 25); on peut transformer la formule en introduisant l'arc $MM' = ds$ et le rayon de courbure R en M :

$$ds^2 = dx^2(1 + y'^2), \qquad R = \frac{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''}.$$

On a, en tirant y'' et dx^2 de ces deux relations et portant dans δ,

$$\delta = \frac{1}{2}\frac{ds^2}{R}, \tag{7}$$

formule très souvent appliquée.

65. Coordonnées du centre de courbure. — Le centre de courbure (α, β) en M est sur la normale en M, à une distance R du pied de celle-ci; on a donc

$$\frac{\alpha - x}{-y'} = \frac{\beta - y}{+1} = \pm\frac{R}{\sqrt{1 + y'^2}} = \pm\frac{(1 + y'^2)}{y''}. \tag{8}$$

Pour déterminer le signe à choisir, remarquons que le centre de courbure est, par rapport à la tangente, du côté des y positifs si $y'' > 0$; du côté des y négatifs si $y'' < 0$; ce qui revient à dire que $\beta - y$ a le signe de y'' (*voir* les deux figures précédentes). Il en résulte que l'on doit prendre le signe $+$, ce qui donne

$$(9) \qquad \alpha = x - y'\frac{1+y'^2}{y''}, \qquad \beta = y + \frac{1+y'^2}{y''}.$$

On peut encore trouver ces formules en cherchant le point où la normale en M,

$$(Y-y)y' + (X-x) = 0,$$

touche son enveloppe; ce point est donné (*Cours de Mathématiques spéciales*) par l'équation de la normale jointe à cette équation dérivée par rapport au paramètre (qui est x) :

$$(Y-y)y'' - y'^2 - 1 = 0,$$

d'où l'on tire, pour les coordonnées X, Y du point cherché, les expressions (9).

66. Remarque. — Dans les formules qui précèdent entrent y' et y''; si la courbe considérée est donnée sous la forme $\varphi(x, y) = 0$, non résolue par rapport à y, il est aisé de calculer y' et y''. On a en effet, en dérivant l'équation $\varphi = 0$ par rapport à x,

$$\varphi'_x + y'\varphi'_y = 0,$$

d'où y'; dérivons une seconde fois

$$\varphi''_{x^2} + 2y'\varphi''_{xy} + y'^2\varphi''_{y^2} + y''\varphi'_y = 0,$$

d'où y''; une nouvelle dérivation donnerait y''', ...

Soit par exemple l'ellipse

$$b^2x^2 + a^2y^2 - a^2b^2 = 0.$$

On a

$$b^2x + a^2yy' = 0,$$

c'est-à-dire

$$y' = -\frac{b^2}{a^2}\frac{x}{y}.$$

Une nouvelle dérivation donne

$$y'' = -\frac{b^2}{a^2}\frac{y - xy'}{y^2} = -\frac{b^2}{a^2}\frac{a^2y^2 + b^2x^2}{a^2y^3} = \frac{-b^4}{a^2y^3}.$$

Par suite, on a, pour le rayon de courbure, R, au point x, y

$$R = \pm\frac{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''} = \frac{(a^4y^2 + b^4x^2)^{\frac{3}{2}}}{a^4b^4}.$$

67. **Autre expression du rayon de courbure.** — Si la courbe, au lieu d'être donnée sous la forme $y = f(x)$, est donnée sous la forme *paramétrique*

$$x = \varphi(t), \qquad y = \psi(t),$$

t étant un paramètre variable, il est aisé d'obtenir l'expression du rayon de courbure R, en fonction des dérivées de φ et de ψ par rapport à t.

On a en effet

$$dy = y'(x)\,dx;$$

différentions en regardant t comme la variable indépendante

$$d_t^2 y = y''(x)\,dx^2 + y'(x)d_t^2 x,$$

d'où

$$y''(x) = \frac{d_t^2 y - y'(x)d_t^2 x}{dx^2}.$$

Remplaçons $y'(x)$ par $\frac{dy}{dx}$ et portons dans l'expression de R ces valeurs de $y''(x)$ et $y'(x)$, il vient :

$$R = \frac{[1+y'^2(x)]^{\frac{3}{2}}}{y''(x)} = \frac{(dx^2 + dy^2)^{\frac{3}{2}}}{dx\,d^2y - dy\,d^2x},$$

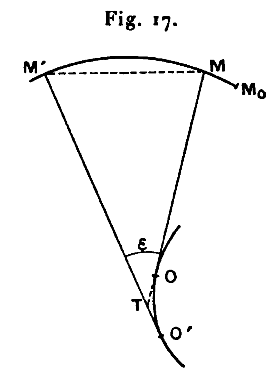
les différentielles étant prises dans l'hypothèse où la variable indépendante est t. On peut écrire, en divisant les deux termes par dt^3,

$$R = \frac{(x_t'^2 + y_t'^2)^{\frac{3}{2}}}{x_t'y_t'' - y_t'x_t''} \quad \text{ou} \quad \frac{[\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)]^{\frac{3}{2}}}{\varphi'(t)\psi''(t) - \psi'(t)\varphi''(t)}.$$

68. **Arc de développée.** — Soient M et M′ deux points voisins sur une courbe plane, O et O′ les points où les normales en M et M′

touchent la développée, T leur point de rencontre; cherchons la valeur principale de l'élément d'arc de développée OO′ (*fig.* 17).

Fig. 17.



Cette valeur est la même (n° 54, corollaire) que celle de la somme TO′ + TO, c'est-à-dire (M′O′ — M′T) + (MT — MO); si donc on désigne par R et R + ΔR les rayons de courbure en M et M′, on a

$$\text{(10)}\quad \text{Valeur principale } OO' = M'O' - MO + MT - M'T = \Delta R + MT - M'T.$$

Je dis que MT — M′T est un infiniment petit d'ordre supérieur à ΔR, c'est-à-dire à dR; ou, puisque R est fonction de l'arc $s = M_0M$ de la courbe proposée, d'ordre supérieur à ds ou MM′ (n° 20). On a en effet, dans le triangle MTM′,

$$\frac{MT}{\sin M'} = \frac{M'T}{\sin M} = \frac{MM'}{\sin \varepsilon};$$

d'où

$$MT - M'T = MM'\left(\frac{\sin M' - \sin M}{\sin \varepsilon}\right),$$

et tout revient à prouver que $\dfrac{\sin M' - \sin M}{\sin \varepsilon}$ est un infiniment petit. Or

$$\frac{\sin M' - \sin M}{\sin \varepsilon} = \frac{\sin(M + \varepsilon) - \sin M}{\sin \varepsilon}$$

$$= \frac{\sin M + \varepsilon \cos M - \dfrac{\varepsilon^2}{2}\sin M + \ldots - \sin M}{\varepsilon - \frac{1}{6}\varepsilon^3 + \ldots} = \frac{\cos M - \dfrac{\varepsilon}{2}\sin M + \ldots}{1 - \frac{1}{6}\varepsilon^2 + \ldots};$$

et cette expression est bien un infiniment petit, puisque, la limite de l'angle M étant $\frac{\pi}{2}$, celle de $\cos M$ est zéro.

Par suite, la valeur principale (10) de OO′ est celle de ΔR, c'est-à-dire dR, et l'on a, en désignant par σ l'arc de développée,

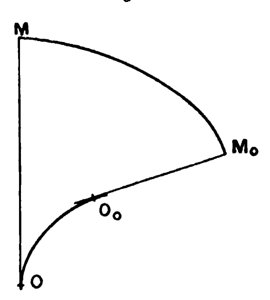
$$(11) \qquad d\sigma = dR.$$

On en conclut (n° 21)

$$\sigma = R + \text{const.},$$

c'est-à-dire que l'arc fini de développée O_0O (*fig.* 18), d'origine

Fig. 18.



fixe O_0, est égal, à une constante près, au rayon de courbure MO. On détermine la constante en supposant que M coïncide avec le point M_0 de la courbe, pour lequel le centre de courbure est O_0; alors $\sigma = 0$, et la constante est par suite $-R_0$, R_0 étant le rayon de courbure M_0O_0. Donc

$$\text{arc}\, O_0O = MO - M_0O_0 = R - R_0,$$

ce qui s'énonce ainsi :

Un arc de développée est égal à la différence des rayons de courbure de la développante qui correspondent à ses extrémités (¹).

(¹) Il résulte de cette propriété que si un fil inextensible, d'abord tendu suivant OM, est enroulé ensuite sur la développée OO_0 de manière à rester toujours tendu et tangent à la développée au point où il s'en détache, le point M de ce fil décrira la développante MM_0. C'est là l'origine des termes de développées et de développantes.

69. Rayons de courbure des développées successives. — Soit θ l'angle que forme la tangente en un point x, y d'une courbe $y = f(x)$ avec l'axe des x; on a

$$\tang\theta = y' \qquad \text{ou} \qquad \theta = \text{arc}\tang y'.$$

Le rayon de courbure R au même point et l'angle θ sont fonctions de la seule variable indépendante x; ils sont donc fonction l'un de l'autre, de sorte que

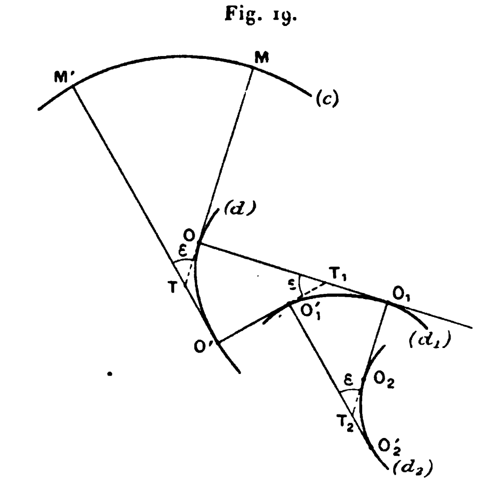
$$R = \varphi(\theta).$$

On obtiendrait cette relation en éliminant x entre les équations

$$R = \frac{[1 + f'^2(x)]^{\frac{3}{2}}}{f''(x)}, \qquad \tang\theta = f'(x).$$

Cela posé, soient M et M′ (*fig.* 19) deux points voisins sur la

Fig. 19.



courbe considérée (c); O et O′ les centres de courbure en M et M′, centres qui sont sur la développée (d); O_1 et O'_1 les centres de courbure de (d) en O et O′, centres qui sont sur la développée (d_1) de (d); et ainsi de suite. On peut donner des rayons de courbure successifs de (d), (d_1), ... aux points O, O_1, ... une expression remarquable.

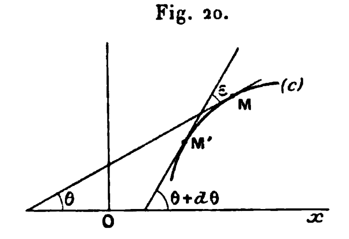
Soit d'abord R′ le rayon de courbure OO_1 de (d) au point O;

on a

$$R' = \lim \frac{\text{arc}\, OO'}{\varepsilon},$$

car l'angle OT_1O' est évidemment égal à l'angle de contin-

Fig. 20.



gence ε de l'arc MM'. D'ailleurs, d'après le numéro précédent, $\text{arc}\, OO' = dR$, et évidemment (*fig.* 20) $\varepsilon = d\theta$.

On a donc

$$R' = \frac{dR}{d\theta} = \varphi'(\theta).$$

On aura de même pour le rayon de courbure $R'' = O_1O_2$, de (d) au point O_1,

$$R'' = \frac{dR'}{\varepsilon} = \frac{dR'}{d\theta} = \varphi''(\theta),$$

et ainsi de suite. Donc :

Soit $R = \varphi(\theta)$ *la relation qui lie le rayon de courbure* R, *en un point* M *d'une courbe plane, à l'angle* θ *que fait la tangente en ce point avec l'axe des* x; *soient* O *le centre de courbure en* M; O_1 *celui de la développée en* O; O_2 *celui de la développée en* O_1, *et ainsi de suite. On a*

$$OO_1 = R' = \varphi'(\theta), \qquad O_1O_2 = R'' = \varphi''(\theta), \qquad \dots$$

70. **Corollaire I.** — On déduit de là l'expression de R', R'', ... en fonction des coordonnées x, y du point M, et des dérivées successives y', y'', ... en ce point. En effet

$$R' = \frac{dR}{d\theta},$$

$$R = \frac{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''},$$

d'où

$$dR = \frac{(1+y'^2)^{\frac{1}{2}}}{y''^2}[3y'y''^2 - y'''(1+y'^2)]\,dx.$$

D'ailleurs

$$\theta = \text{arc tang}\, y',$$

d'où

$$d\theta = \frac{y''}{1+y'^2}\,dx,$$

ce qui donne

$$(12) \qquad R' = \frac{dR}{d\theta} = \frac{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''^3}[3y'y''^2 - y'''(1+y'^2)].$$

On calculerait de même $R'' = \frac{dR'}{d\theta}$, et ainsi de suite; il est clair que dans l'expression de chaque rayon nouveau s'introduit une nouvelle dérivée de y, qui, la première fois qu'elle apparaît, figure linéairement, c'est-à-dire au premier degré.

71. Corollaire II. — Soient $y = y(x)$ et $y = Y(x)$ les équations de deux courbes ayant un point commun M_0, d'abscisse x_0; on a

$$y(x_0) = Y(x_0).$$

Si les deux courbes ont même tangente en M_0, il est clair que

$$y'(x_0) = Y'(x_0).$$

Si l'on veut encore qu'elles aient même centre de courbure O, il faut et il suffit que les rayons de courbure soient égaux *et de même signe,* ce qui équivaut à

$$y''(x_0) = Y''(x_0),$$

car y'' figure au premier degré dans l'expression du rayon de courbure.

Si l'on veut de plus que les deux développées aient même centre de courbure O_1 en O, c'est-à-dire même R', il faut et il suffit en outre que

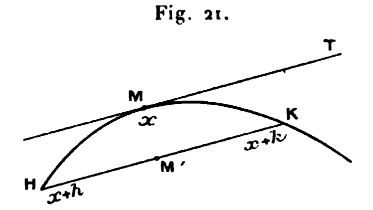
$$y'''(x_0) = Y'''(x_0),$$

car y''' figure au premier degré dans R'; et ainsi de suite.

72. Tangente à l'extrémité d'une courbe diamétrale. — Soit MT

la tangente à une courbe en un point M (*fig.* 21); menons une sécante HK parallèle à MT et voisine de MT, coupant la courbe en H et K, voisins de M; M′ étant le milieu de HK, *on demande*

Fig. 21.



la limite du coefficient angulaire de la droite MM′. C'est évidemment le coefficient angulaire de la tangente en M au *diamètre* des cordes parallèles à MT.

Soient x et $y(x)$ les coordonnées de M; $x+h$ et $x+k$ les abscisses de H et K. L'ordonnée de M′ sera la demi-somme des ordonnées $y(x+h)$ et $y(x+k)$, et le coefficient angulaire μ de MM′ sera

$$\mu = \frac{\frac{1}{2}[y(x+h)+y(x+k)]-y(x)}{\frac{1}{2}(x+h+x+k)-x} = \frac{y(x+h)+y(x+k)-2y(x)}{h+k},$$

ou, en développant $y(x+h)$, $y(x+k)$ par la formule de Taylor,

$$(13)\quad \left\{ \begin{aligned} \mu &= \frac{(h+k)y'(x)+\frac{1}{2}(h^2+k^2)y''(x)+\frac{1}{6}(h^3+k^3)y'''(x)+\dots}{h+k} \\ &= y'(x)+\frac{1}{2}\frac{h^2+k^2}{h+k}y''(x)+\frac{1}{6}\frac{h^3+k^3}{h+k}y'''(x)+\dots. \end{aligned} \right.$$

D'ailleurs les infiniment petits h et k sont liés par une relation que l'on obtient en écrivant que HK est parallèle à MT, c'est-à-dire

$$\frac{y(x+h)-y(x+k)}{(h-k)} = y'(x),$$

ou, en développant

$$\frac{(h-k)y'(x)+\frac{1}{2}(h^2-k^2)y''(x)+\frac{1}{6}(h^3-k^3)y'''(x)+\dots}{h-k} = y'(x).$$

Divisons par $h-k$ au premier membre, il vient :

$$(14)\qquad y'+\frac{1}{2}(h+k)y''(x)+\frac{1}{6}(h^2+hk+k^2)y'''(x)+\dots = y'.$$

Prenons k pour infiniment petit principal, et exprimons d'abord $h+k$, qui figure dans (13), en fonction de k. L'équation (14) s'écrit

$$\frac{1}{2}(h+k)y''(x)+\frac{1}{6}[(h+k)^2-k(h+k)+k^2]y'''(x)+\ldots=0,$$

les termes non écrits étant d'ordre *trois* au moins en k et $h+k$. La valeur principale du premier membre est

$$\frac{1}{2}(h+k)y''(x)+\frac{1}{6}k^2y'''(x),$$

car les termes en $k\,(h+k)$ et $(h+k)^2$ sont d'ordre supérieur au terme en $(h+k)$; on a donc

$$\text{Valeur principale } \frac{1}{2}(h+k)y''(x)=-\frac{1}{6}k^2y'''(x),$$

c'est-à-dire

$$\text{Valeur principale } h+k=-\frac{1}{3}k^2\frac{y'''(x)}{y''(x)},$$

et par suite

$$\text{Valeur principale } h=-k.$$

Portons ces valeurs dans (13), il vient

$$\lim\mu=y'(x)+\frac{1}{2}\,\frac{2k^2y''(x)}{-\frac{1}{3}k^2\dfrac{y'''(x)}{y''(x)}},$$

car les termes suivants dans μ renferment évidemment k en facteur ; donc finalement

$$\lim\mu=y'-3\frac{y''^2}{y'''},$$

y', y'', y''' étant les dérivées de y au point M. Cette valeur est différente de y' (sauf aux points d'inflexion pour lesquels $y''=0$), c'est-à-dire que la tangente au diamètre et la tangente à la courbe proposée en M sont distinctes.

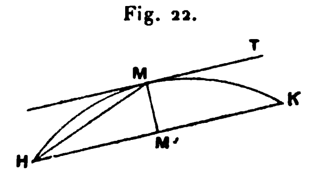
73. Corollaire. — Reprenons la tangente MT et la corde parallèle infiniment voisine HK (*fig.* 22) ; je dis que l'arc HM a même valeur principale que la demi-corde HM′. En effet, dans le

triangle HMM′ :

$$\frac{\text{corde HM}}{\text{HM}'} = \frac{\sin \text{MM}'\text{H}}{\sin \text{M}'\text{MH}}.$$

Le rapport des deux sinus tend vers l'unité, car l'angle MM′H a pour limite l'angle *non nul* de la tangente MT avec la tangente

Fig. 22.



à la courbe diamétrale en M, et l'angle M′MH a pour limite l'angle supplémentaire.

Remarque. — Dans le raisonnement précédent, on n'a pas tenu compte explicitement de l'hypothèse que M′ est le milieu de HK; on s'est appuyé uniquement sur ce que les deux sinus du second rapport ne tendent pas vers zéro, c'est-à-dire sur ce que la tangente à la proposée et la tangente à la courbe diamétrale en M font un angle non nul.

Il semble qu'on puisse recommencer le même raisonnement en supposant, par exemple, que M′ soit au quart de la corde HK à partir de H, et l'on démontrerait ainsi que l'arc HM et le quart de la corde HK ont même valeur; résultat en contradiction avec le précédent. L'erreur du second raisonnement provient de ce que la direction limite de MM′ coïncide alors avec MT (¹), de sorte

(¹) Il est aisé de s'en rendre compte. Si M′ divise HK dans le rapport $\frac{p}{q}$, on a, pour les coordonnées de ce point,

$$\frac{1}{p+q}[q(x+h)+p(x+k] \quad \text{et} \quad \frac{1}{p+q}[qy(x+h)+py(x+k)],$$

d'où, pour le coefficient angulaire μ' de MM′,

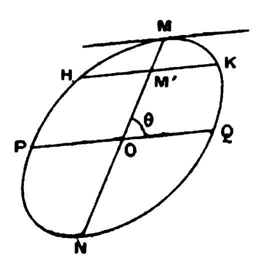
$$\begin{aligned}\mu' &= \frac{qy(x+h)+py(x+k)-(p+q)y(x)}{q(x+h)+p(x+k)-(p+q)x}\\ &= \frac{y'(x)[qh+pk]+\frac{1}{2}y''(x)[qh^2+pk^2]+\ldots}{qh+pk}.\end{aligned}$$

D'ailleurs h et k sont toujours liés par la relation (14), qui a donné pour h la

que les deux sinus qui interviennent dans le corollaire ont pour limite zéro, et rien ne prouve que leur rapport tende vers l'unité.

74. Application du Corollaire. — Soit à évaluer le rayon de courbure en un point M d'une ellipse (*fig.* 23). Prenons H infini-

Fig. 23.



ment voisin de M sur la courbe et menons la corde HK, parallèle à la tangente en M. On a, pour le rayon de courbure R cherché, en vertu de la formule du n° 64,

$$R = \lim \frac{1}{2} \frac{\overline{HM}^2}{\delta},$$

δ désignant la distance de H à la tangente en M, c'est-à-dire la distance de M à la corde HK.

Menons le diamètre OM, qui passe par le milieu M' de HK; on a

$$\delta = MM' \sin\theta,$$

θ étant l'angle du diamètre OM avec son conjugué OQ. D'ailleurs, d'après le Corollaire précédent, on peut remplacer HM par HM', et il vient

$$R = \lim \frac{1}{2} \frac{\overline{HM'}^2}{MM'} \frac{1}{\sin\theta}.$$

---

valeur principale $-k$. Il vient alors, en supposant $\frac{p}{q} \gtrless 1$, c'est-à-dire en supposant que M' n'est pas le milieu de HK,

$$\mu' = \frac{k y'(p-q) + \frac{1}{2} k^2 y''(p+q) + \ldots}{k(p-q)} = y' + \frac{1}{2} k y'' \frac{(p+q)}{p-q} + \ldots,$$

ce qui montre que $\lim \mu' = y'$, puisque $p - q \gtrless 0$. C. Q. F. D.

D'après une propriété fondamentale de l'ellipse, si N est la seconde extrémité du diamètre OM, la quantité $\frac{\overline{HM'}^2}{MM' \times M'N}$ est la même pour tous les points H de l'ellipse; elle est donc égale, en particulier, à $\frac{b'^2}{a'^2}$, b' et a' désignant les demi-diamètres conjugués OP et OM. Par suite,

$$R = \lim \frac{1}{2} M'N \frac{b'^2}{a'^2 \sin\theta} = \frac{1}{2} 2a' \frac{b'^2}{a'^2 \sin\theta}.$$

En vertu d'un des théorèmes d'Apollonius $a'b' \sin\theta$ est égal à ab, en désignant par a et par b les axes de l'ellipse; on a donc

$$R = \frac{b'^2}{ab},$$

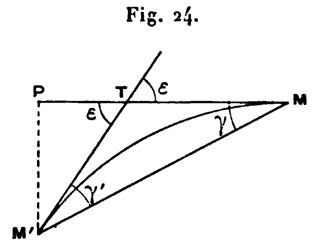
formule où b' est le demi-diamètre parallèle à la tangente en M.

Géométrie infinitésimale.

75. Il est souvent utile et facile de raisonner géométriquement sur les infiniment petits sans faire appel à l'appareil des formules analytiques; nous allons donner quelques exemples de questions traitées par cette méthode qu'il importe de savoir manier.

76. Triangle formé par une corde et les tangentes aux extrémités. — M et M′ étant infiniment voisins sur une courbe, MT

Fig. 24.



et M′T (*fig.* 24) les tangentes en ces points, *on demande les*

valeurs principales des côtés et des angles du triangle MTM', l'infiniment petit principal étant l'arc $MM' = ds$.

On a d'abord :

Valeur principale corde $MM' = ds$,
Angle $PTM' =$ angle de contingence $\varepsilon = \frac{ds}{R}$,
R étant le rayon de courbure en M.

Abaissons M'P normal à MT; on sait (n° 64) que

$$\text{Valeur principale } M'P = \frac{1}{2}\frac{ds^2}{R}.$$

Or le triangle PTM' donne

$$TM' = \frac{M'P}{\sin\varepsilon},$$

et, en remplaçant M'P par sa valeur principale, $\sin\varepsilon$ par sa valeur principale $\varepsilon = \frac{ds}{R}$, on a

$$\text{Valeur principale } TM' = \frac{1}{2}ds.$$

Comme $MT + TM'$ a pour valeur principale ds (n° 54, Corollaire), on a aussi

$$\text{Valeur principale } MT = \frac{1}{2}ds.$$

Les angles γ et γ' en M et M' se calculent aisément. On a

$$M'P = MM'\sin\gamma,$$

d'où

$$\text{Valeur principale } \gamma = \frac{M'P}{MM'} = \frac{1}{2}\frac{ds^2}{R\,ds} = \frac{\varepsilon}{2}.$$

Comme $\gamma + \gamma' = \varepsilon$, on a aussi

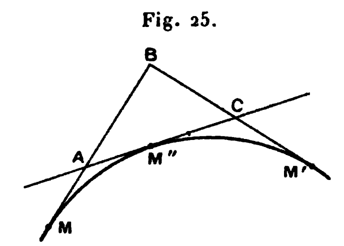
$$\text{Valeur principale } \gamma' = \frac{1}{2}\frac{ds}{R} = \frac{\varepsilon}{2}.$$

77. **Application.** — On considère le triangle ABC (*fig.* 25), formé par trois tangentes en trois points infiniment voisins M, M'', M' pris sur une courbe; *on demande la position limite du cercle circonscrit à ce triangle.*

A la limite, tous les points A, B, C, M'', M' sont confondus en M; le cercle cherché passe donc par M. Le centre du cercle circon-

scrit à ABC est sur la perpendiculaire au milieu de AB, droite qui, à la limite, devient la normale en M : le cercle cherché a donc son centre sur la normale en M, et dès lors touche la

Fig. 25.



courbe en M. Il suffit maintenant, pour le déterminer complètement, de calculer son rayon, car il a évidemment sa concavité en M tournée dans le même sens que celle de la courbe.

Or si R′ est le rayon du cercle circonscrit à ABC, on a, par une formule connue,

$$2R' = \frac{AC}{\sin B}.$$

D'ailleurs la valeur principale de AC, c'est-à-dire $AM'' + M''C$, est, d'après ce qui précède,

$$\frac{1}{2}(\text{arc}\,MM'') + \frac{1}{2}(\text{arc}\,M''M') = \frac{1}{2}(\text{arc}\,MM');$$

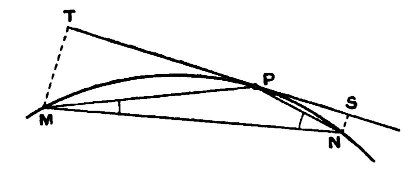
la valeur principale de $\sin B$ est ε, angle de contingence de l'arc $MM'(=ds)$. Donc

$$\lim 2R' = \frac{1}{2}\frac{ds}{\varepsilon} = \frac{1}{2}R,$$

c'est-à-dire que le *rayon du cercle cherché est le quart de celui du cercle de courbure en* M.

78. Triangle formé par trois points infiniment voisins. —

Fig. 26.



Soient M, N, P (*fig.* 26), trois points infiniment voisins sur une

courbe, et qui, à la limite, se confondent en M; on demande la valeur principale de la somme des angles $\hat{M}$ et $\hat{N}$ du triangle MPN; le point P est entre M et N.

Abaissons MT et NS normales à la tangente en P; on a

$$\hat{M} + \hat{N} = \widehat{TPM} + \widehat{SPN}.$$

Or le triangle rectangle TPM donne

$$(1) \qquad \sin \widehat{TPM} = \frac{MT}{MP}.$$

La valeur principale de MT est (n° 64) $\frac{(\mathrm{arc}\,MP)^2}{2R_1}$, R_1 étant le rayon de courbure en P, dont la valeur principale est R, rayon de courbure en M; la valeur principale de MP est (arc MP); l'équation (1) donne donc

$$\text{Valeur principale } \widehat{TPM} = \frac{\mathrm{arc}\,MP}{2R}.$$

De même on aura

$$\text{Valeur principale } \widehat{SPN} = \frac{\mathrm{arc}\,NP}{2R},$$

d'où

$$(2) \qquad \text{Valeur principale } (\hat{M} + \hat{N}) = \frac{1}{2R}(\mathrm{arc}\,MP + \mathrm{arc}\,NP) = \frac{1}{2R}ds,$$

ds désignant l'arc total MN. On peut observer que $\frac{ds}{2R}$ est la moitié de l'angle de contingence, ε, de cet arc.

La formule (2) est intéressante; elle montre que la valeur principale de $(\hat{M} + \hat{N})$ qui paraissait, *a priori*, devoir dépendre de deux infiniment petits, arc MP et arc MN, ne dépend que de ce dernier.

79. Applications. — 1° *Cercle osculateur.* — Considérons le cercle qui passe par les trois points M, N, P; je dis qu'à la limite il se confond avec le cercle de courbure en M. En effet, ρ étant le rayon du cercle considéré, on a

$$2\rho = \frac{\text{corde } MN}{\sin MPN} = \frac{\text{corde } MN}{\sin(\hat{M} + \hat{N})}.$$

La limite de ρ est donc

$$\lim \rho = \frac{1}{2}\,\frac{ds}{\text{valeur principale}\,(\widehat{M}+\widehat{N})} = \frac{1}{2}\,\frac{ds}{\frac{ds}{2R}} = R.$$

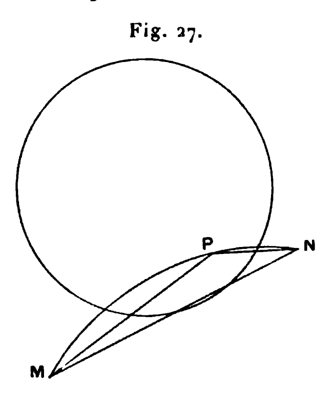
Cette relation établit le théorème, car le cercle de rayon ρ est évidemment, à la limite, tangent à la courbe en M, les deux courbures étant de même sens; et, puisque $\lim \rho = R$, il vient se confondre avec le cercle de courbure. De là le nom de *cercle osculateur* donné à ce dernier cercle.

2° *Courbes passant par trois points consécutifs d'une courbe fixe.* — Soit une courbe déterminée par un certain nombre de conditions, parmi lesquelles figurent celles de passer par les trois points M, N, P; je dis qu'à la limite, elle a même cercle de courbure en M que la proposée. En effet, le cercle qui passe par les trois points M, N, P est, à la limite, osculateur à l'une et à l'autre courbe.

3° *Hyperboles équilatères ayant même cercle osculateur en un point.* — Considérons les hyperboles équilatères qui ont, en M, même cercle osculateur que la courbe proposée; on peut les regarder, en vertu de ce qui précède, comme limites des hyperboles équilatères passant par M, N, P; le lieu des centres de celles-ci, d'après un théorème connu, est le cercle des neuf points du triangle MNP, cercle dont le rayon est moitié de celui du cercle circonscrit au même triangle.

Il est clair, d'ailleurs, que le cercle des neuf points (*fig.* 27),

Fig. 27.



c'est-à-dire le cercle qui passe par les milieux des côtés du

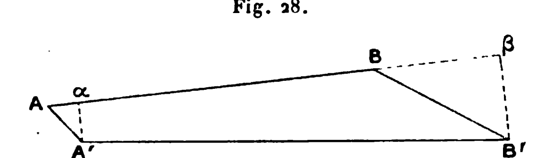
triangle MNP, est, à la limite, tangent à la proposée en M, sa concavité en ce point ayant le sens opposé à celle de la courbe.

Comme, à la limite, le cercle circonscrit au triangle devient le cercle osculateur, on voit que :

Le lieu des centres des hyperboles équilatères ayant même cercle osculateur en un point M *est un cercle, tangent extérieurement en* M *au cercle osculateur et ayant pour diamètre le rayon de celui-ci.*

80. Variation de longueur d'un segment de droite. — Soient AB et A'B' (*fig.* 28) deux positions voisines d'un segment rectiligne

Fig. 28.



de longueur variable; on demande d'exprimer la variation infiniment petite de la longueur l en fonction des déplacements des extrémités.

Projetons A' et B' sur AB en α et β; on a, pour l'accroissement de longueur Δl,

$$\Delta l = A'B' - AB = A'B' - (A\alpha + \alpha\beta - B\beta).$$

D'ailleurs, ε étant l'angle de A'B' et de AB,

$$\alpha\beta = A'B'\cos\varepsilon = A'B'\left(1 - \frac{\varepsilon^2}{2} + \ldots\right),$$

$$A\alpha = AA'\cos(AA', AB) = - AA'\cos(AA', BA),$$

$$B\beta = BB'\cos(BB', AB).$$

On a ainsi

$$\Delta l = AA'\cos(AA', BA) + BB'\cos(BB', AB) + A'B'\left(\frac{\varepsilon^2}{2} + \ldots\right).$$

Je dis que, dans le calcul de la valeur principale de Δl, on peut négliger les termes en ε^2 devant les termes en AA' et BB', c'est-à-dire que ε^2 est d'ordre infinitésimal supérieur à AA' et BB'.

Soit, en effet, O (*fig.* 29) le point de rencontre de AB et A'B';

le triangle OBB′ donne

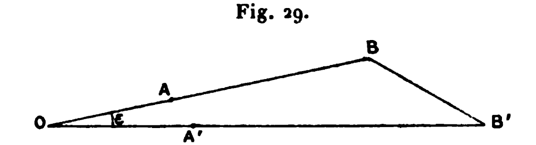
$$\frac{BB'}{\sin\varepsilon} = \frac{OB}{\sin B'},$$

d'où

$$\text{Valeur principale } BB' = \varepsilon \frac{OB}{\sin(BB', AB)};$$

d'ailleurs à la limite O est le point où AB touche son enveloppe.

Fig. 29.

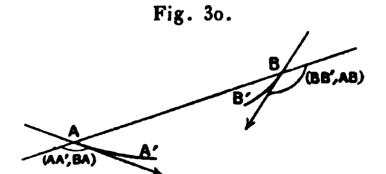


Cela montre que BB′ (et de même AA′) est de l'ordre de ε. Par suite, ε^2 est négligeable devant AA′ et BB′, et l'on a, pour la valeur principale dl, de Δl,

$$(3) \qquad dl = AA'\cos(AA', BA) + BB'\cos(BB', AB).$$

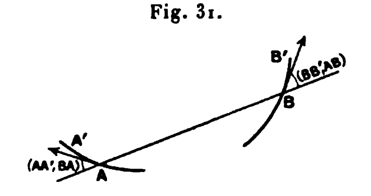
C'est la formule cherchée; l'angle (AA′, BA) (*fig.* 30 ou 31),

Fig. 30.



puisqu'on est passé à la limite, est l'angle que forme la tangente

Fig. 31.



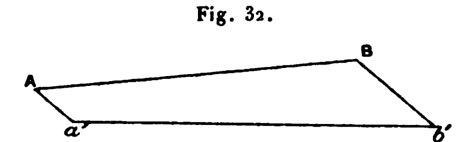
en A au lieu du point A, dirigée de A vers A′, avec le segment BA, dirigé de B vers A; et l'angle (BB′, AB) se définit de même.

81. Remarque. — La formule (3) s'étend au déplacement d'un segment dans l'espace; la même démonstration s'applique sans modification. Pour établir, toutefois, que AA′ et BB′ ne sont

pas d'ordre supérieur à ε, on mènera par AB un plan parallèle à A'B' et l'on projettera A'B' sur ce plan en $a'b'$ (*fig.* 32).

L'angle ε est aussi l'angle de AB et de $a'b'$; Bb' et Aa' sont de

Fig. 32.

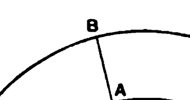


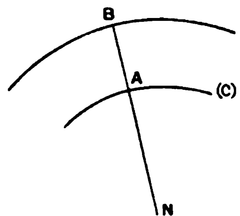
l'ordre de ε, comme on l'a vu plus haut; donc BB', qui est au moins égal à sa projection Bb', ne peut être d'ordre infinitésimal supérieur à ε.

82. Applications. — 1° *Courbes et surfaces parallèles.* — Si l'on porte sur chaque normale AN à une courbe ou surface (C), à partir du pied, A, une longueur constante $AB = l$, le lieu du point B est dit *courbe* ou *surface parallèle* à la première.

Deux courbes ou surfaces parallèles ont les mêmes normales, c'est-à-dire que la normale en B au lieu du point B est la droite AN (*fig.* 33). Appliquons, en effet, la formule de varia-

Fig. 33.





tion de longueur au segment AB : l étant constant, $dl = 0$; la droite AB étant normale au lieu de A, $\cos(AA', BA) = 0$; il reste, dans (3),

$$\cos(BB', AB) = 0,$$

c'est-à-dire que la droite AB est normale en B à la direction de tous les déplacements BB', du point B; elle est donc normale au lieu de ce point. C. Q. F. D.

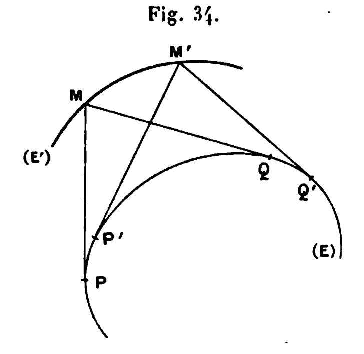
Réciproquement, toutes les courbes ou surfaces qui ont mêmes normales sont parallèles; car si AB est normale en A et B aux

lieux de A et de B, les deux cosinus de la formule (3) sont nuls, et il reste $dl = 0$, d'où $l = \text{const.}$

Dans le plan, les courbes parallèles ont, d'après cela, même développée et sont les développantes de leur développée commune : une courbe plane a donc une infinité simple de développantes, toutes parallèles entre elles.

2° *Théorèmes de Chasles sur les arcs de conique.* — Soient (E) et (E′) (*fig.* 34) deux ellipses homofocales dont la

Fig. 34.



première est intérieure à la seconde. Par un point M de (E′), je mène les deux tangentes MP et MQ à (E); je dis que

$$MP + MQ - \text{arc}\,PQ = \text{const.},$$

lorsque le point M se déplace sur (E′).

Considérons, en effet, un point M′, infiniment voisin de M sur (E′), et les tangentes M′P′, M′Q′; appliquons la formule (3) à chacun des segments MP et MQ, il vient

$$(4)\qquad \begin{cases} d(MP) = PP'\cos(PP', MP) + MM'\cos(MM', PM), \\ d(MQ) = QQ'\cos(QQ', MQ) + MM'\cos(MM', QM). \end{cases}$$

Or, c'est une propriété classique des ellipses homofocales que les tangentes MP et MQ sont également inclinées sur la tangente en M à l'ellipse (E′), c'est-à-dire que

$$\cos(MM', PM) = -\cos(MM', QM);$$

il vient alors, en ajoutant les relations (4) membre à membre,

$$d(MP + MQ) = PP'\cos(PP', MP) + QQ'\cos(QQ', MQ).$$

D'ailleurs, les droites MP et MQ étant respectivement tangentes aux lieux décrits par les points P et Q, le premier cosinus du second membre est égal à -1 et le second à $+1$; il reste alors

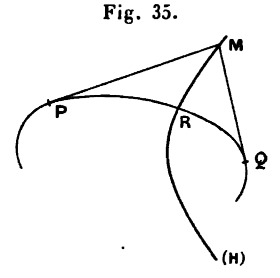
$$d(\mathrm{MP}+\mathrm{MQ}) = \mathrm{QQ}' - \mathrm{PP}' = d(\mathrm{arc\,PQ}),$$

d'où

$$\mathrm{MP}+\mathrm{MQ} - \mathrm{arc\,PQ} = \mathrm{const.} \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Remarque. — Si, au lieu d'une ellipse (E'), on considère une

Fig. 35.



hyperbole (H) (*fig.* 35), homofocale à (E), le théorème correspondant est le suivant :

$$\mathrm{MP} - \mathrm{MQ} = \mathrm{arc\,PR} - \mathrm{arc\,QR} + \mathrm{const.},$$

et s'établit de la même manière. La constante est nulle, comme on le voit, en supposant que M coïncide avec R; il reste

$$\mathrm{arc\,PR} - \mathrm{arc\,QR} = \mathrm{MP} - \mathrm{MQ}.$$

83. Caustiques. — On nomme *caustique par réflexion* d'une courbe plane (C), par rapport à un point O de son plan, l'enveloppe des rayons lumineux issus de O, après leur réflexion sur la courbe.

Détermination du point de contact d'un rayon et de la caustique. — Soit OM (*fig.* 36) un rayon incident, MP ce rayon réfléchi; soient de même OM' et M'P un rayon infiniment voisin et son réfléchi : il s'agit de trouver la position limite du point P commun à MP et M'P; cette position sera, comme on sait, le point de contact de MP avec la caustique.

Menons les normales à (C) en M et M'; elles se coupent en N, et leur angle est l'angle de contingence ε de l'arc MM'. Désignons par φ et φ' les deux angles d'incidence, égaux aux angles de réflexion.

Le triangle MM′P donne

$$\frac{M'P}{\sin PMM'} = \frac{MM'}{\sin P},$$

ou, en passant à la limite,

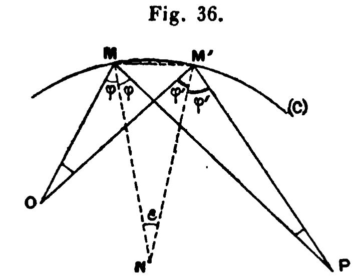
(5) $$\lim MP = \cos\varphi \frac{ds}{\widehat{P}},$$

étant posé

$$\text{arc}\, MM' = ds.$$

Tout revient ainsi à évaluer la valeur principale de l'angle $\widehat{P}$. On

Fig. 36.



a évidemment, par des considérations de Géométrie élémentaire,

$$\widehat{P} + \widehat{O} = 2\varepsilon,$$

et l'on calcule l'angle $\widehat{O}$ dans le triangle OMM′ :

$$\frac{OM}{\sin MM'O} = \frac{MM'}{\sin O},$$

d'où, à la limite,

$$\widehat{O} = \frac{ds}{OM}\cos\varphi,$$

et par suite

$$P = 2\varepsilon - \widehat{O} = 2\varepsilon - \frac{ds}{OM}\cos\varphi = 2\frac{ds}{R} - \frac{ds}{OM}\cos\varphi,$$

R désignant le rayon de courbure, $\frac{ds}{\varepsilon}$, de la courbe (C) en M. Portant cette valeur de $\widehat{P}$ dans (5), on trouve finalement

$$\lim MP = \cos\varphi \frac{1}{\frac{2}{R} - \frac{\cos\varphi}{OM}}.$$

Cette formule peut s'écrire plus élégamment. En effet, si l'on

pose

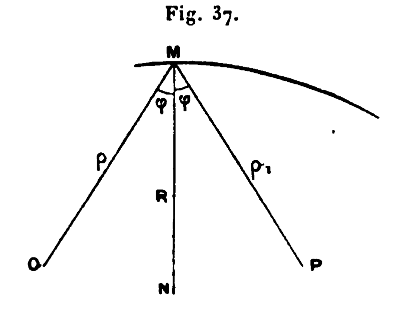
$$OM = \rho, \quad \lim MP = \rho_1,$$

elle devient

$$\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho} = \frac{2}{R\cos\varphi},$$

formule qui résout le problème puisqu'elle donne ρ_1 (*fig.* 37),

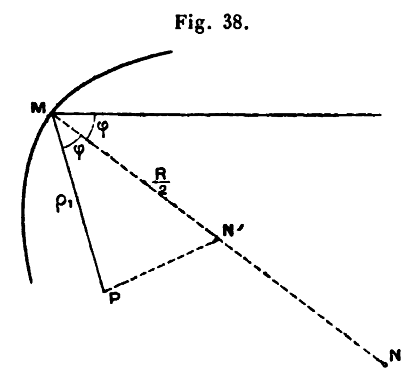
Fig. 37.



c'est-à-dire le point limite P, quand le rayon incident (c'est-à-dire le point M) est donné. On en déduit aisément une construction géométrique très simple du point P.

84. Corollaire I. — Si les rayons lumineux incidents sont pa-

Fig. 38.



rallèles, c'est-à-dire si O est à l'infini, $\frac{1}{\rho}$ est nul, et il reste

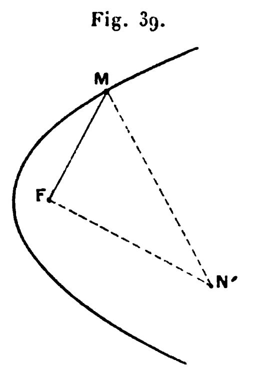
$$\frac{1}{\rho_1} = \frac{2}{R\cos\varphi} \quad \text{ou} \quad \rho_1 = \frac{R}{2}\cos\varphi,$$

c'est-à-dire que le point P est la projection, sur le rayon réfléchi, du point milieu N' du rayon de courbure MN (*fig.* 38).

85. **Corollaire II.** — *Centre de courbure de la parabole.* — Si la courbe (C) est une parabole et si les rayons incidents sont parallèles à l'axe, les rayons réfléchis concourent au foyer, qui est le point P de chacun d'eux. Donc :

Dans une parabole, le milieu N′ *du rayon de courbure en un point quelconque,* M, *est à la rencontre de la normale et*

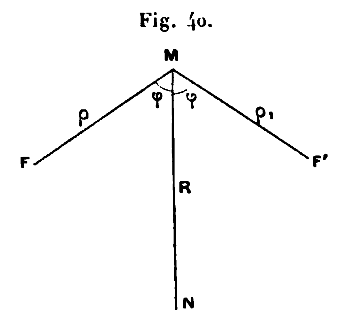
Fig. 39.



de la perpendiculaire élevée au foyer F *sur le rayon vecteur* FM (*fig.* 39).

86. **Corollaire III.** — *Centre de courbure de l'ellipse.* — Si les rayons incidents partent du foyer F d'une ellipse, les rayons réfléchis concourent à l'autre foyer F′ (*fig.* 40). On a donc, en

Fig. 40.



appelant ρ et ρ_1 les deux rayons vecteurs d'un point M de l'ellipse, R le rayon de courbure en M, φ l'angle des rayons vecteurs et de la normale :

$$\frac{1}{\rho} + \frac{1}{\rho_1} = \frac{2}{R\cos\varphi},$$

ou, puisque $\rho + \rho_1 = 2a$,

$$R\cos\varphi = \frac{\rho\rho_1}{a}.$$

On peut encore observer que le produit des distances des foyers F et F′ à la tangente en M est $\rho\rho_1\cos^2\varphi$, égal d'ailleurs à b^2, comme on sait; donc

$$R = \frac{1}{\cos^3\varphi}\,\frac{b^2}{a},$$

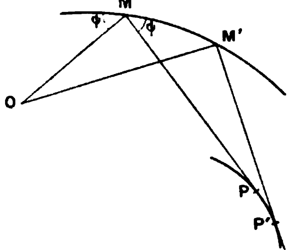
formule qui donne une construction très simple du centre de courbure.

On peut aussi écrire

$$R = \frac{1}{ab}(\rho\rho_1)^{\frac{3}{2}}.$$

87. **Longueur de l'arc de caustique.** — Cherchons la valeur principale de l'élément d'arc PP′ (*fig.* 41) de la caustique; il

Fig. 41.



suffit d'appliquer aux segments MP et OM la formule de la variation de longueur (3), ce qui donne :

$$d(\mathrm{MP}) = \mathrm{MM'}\cos(\mathrm{MM'}, \mathrm{PM}) + \mathrm{PP'}\cos(\mathrm{PP'}, \mathrm{MP}).$$
$$d(\mathrm{OM}) = \mathrm{MM'}\cos(\mathrm{MM'}, \mathrm{OM}).$$

Ajoutant membre à membre, et remarquant sur la figure que

$$\cos(\mathrm{MM'}, \mathrm{PM}) = -\cos\psi, \qquad \cos(\mathrm{MM'}, \mathrm{OM}) = \cos\psi, \qquad \cos(\mathrm{PP'}, \mathrm{MP}) = 1,$$

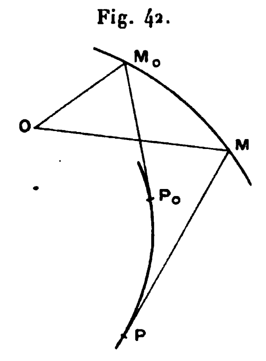
on trouve

$$d(\mathrm{OM} + \mathrm{MP}) = \mathrm{PP'}.$$

Si donc σ est l'arc P_0P (*fig.* 42) de caustique, PP' est égal à $d\sigma$, et l'on a (nº 21)

$$OM + MP = \sigma + \text{const.}$$

Fig. 42.



La constante se détermine en écrivant que σ est nul quand M et P sont en M_0 en P_0; d'où la formule très simple

$$\text{arc}\, P_0P = (OM + MP) - (OM_0 + M_0P_0).$$

CHAPITRE III.

CHANGEMENTS DE VARIABLES.

---

88. Énoncé du problème. — Soit z une fonction de n variables indépendantes $x, y, \ldots$; $z = f(x, y, \ldots)$. On se donne $n+1$ quantités, $u, v, \ldots, w$, fonctions de $x, y, \ldots, z$,

$$u = \varphi(x, y, \ldots, z), \qquad v = \psi(x, y, \ldots, z), \qquad w = \chi(x, y, \ldots, z).$$

En vertu de ces expressions et de l'équation $z = f(x, y, \ldots)$, il existe une relation entre u, v, w, c'est-à-dire que w est fonction de $u, v, \ldots$. Cela posé, le problème du changement de variables est le suivant :

Exprimer les dérivées partielles successives de z par rapport à $x, y, \ldots$, à savoir $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \ldots$, en fonction des dérivées partielles successives de w par rapport à $u, v, \ldots$, à savoir $\frac{\partial w}{\partial u}, \frac{\partial w}{\partial v}, \frac{\partial^2 w}{\partial u^2}, \ldots$; ou, inversement, *exprimer $\frac{\partial w}{\partial u}, \frac{\partial w}{\partial v}, \ldots$, en fonction de $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \ldots$.*

Ce problème peut être traité de bien des manières; on n'indiquera ici qu'une seule méthode reposant sur l'emploi des différentielles totales. Afin de préciser l'énoncé de la règle finale, on appellera *fonction et variables anciennes* celles qui figurent dans les dérivées dont on cherche l'expression; *fonction et variables nouvelles* celles qui figurent dans les dérivées à l'aide desquelles on veut exprimer les précédentes.

Ainsi, si l'on cherche l'expression de $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \ldots$, en fonction de $\frac{\partial w}{\partial u}, \frac{\partial w}{\partial v}, \ldots$, la fonction ancienne sera z, les variables anciennes $x, y, \ldots$, la fonction nouvelle sera w, les variables nouvelles $u, v, \ldots$.

I. — SOLUTION.

89. Cela posé, supposons, pour simplifier l'écriture, $n=2$; z est fonction de deux variables indépendantes x, y, et l'on se donne *les équations qui définissent le changement de variables*

$$(1) \qquad u=\varphi(x,y,z), \qquad v=\psi(x,y,z), \qquad w=\chi(x,y,z).$$

Admettons que les fonction et variables anciennes soient z, x, y, c'est-à-dire qu'on cherche à exprimer $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \ldots,$ en fonction de $\frac{\partial w}{\partial u}, \frac{\partial w}{\partial v}, \ldots$.

Partons de la relation de différentielle totale entre la fonction et les variables *nouvelles*

$$(2) \qquad dw = \frac{\partial w}{\partial u}du + \frac{\partial w}{\partial v}dv,$$

et différentions les équations (1) du changement de variables :

$$(3) \qquad \begin{cases} du = \frac{\partial \varphi}{\partial x}dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y}dy + \frac{\partial \varphi}{\partial z}dz, \\ dv = \frac{\partial \psi}{\partial x}dx + \ldots, \\ dw = \frac{\partial \chi}{\partial x}dx + \ldots. \end{cases}$$

Portons maintenant ces valeurs (3) de du, dv, dw [1] dans la relation (2); il vient, en ordonnant par rapport à dx, dy, dz :

$$0 = dx\left(\frac{\partial w}{\partial u}\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial v}\frac{\partial \psi}{\partial x} - \frac{\partial \chi}{\partial x}\right) + dy\left(\frac{\partial w}{\partial u}\frac{\partial \varphi}{\partial y} + \ldots\right) + dz\left(\frac{\partial w}{\partial u}\frac{\partial \varphi}{\partial z} + \ldots\right).$$

Si l'on résout cette équation par rapport à dz, on a une rela-

(1) Il n'est pas nécessaire de supposer, comme nous l'avons fait pour simplifier les écritures, que les trois équations (1) du changement de variables sont résolues par rapport aux variables *nouvelles* u, v, w; quelle que soit leur forme, en les différentiant, on obtiendra trois équations (3) d'où l'on tirera *linéairement* du, dv, dw pour les porter dans (2). En d'autres termes, on éliminera du, dv, dw entre (2) et (3).

tion de la forme

$$(4) \qquad dz = \mathrm{P}\,dx + \mathrm{Q}\,dy,$$

et, d'après le n° 38, le coefficient P est égal à $\frac{\partial z}{\partial x}$, Q à $\frac{\partial z}{\partial y}$. Donc

$$(5) \qquad -\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\frac{\partial w}{\partial u}\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial v}\frac{\partial \psi}{\partial x} - \frac{\partial \chi}{\partial x}}{\frac{\partial w}{\partial u}\frac{\partial \varphi}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial v}\frac{\partial \psi}{\partial z} - \frac{\partial \chi}{\partial z}}, \qquad -\frac{\partial z}{\partial y} = \ldots,$$

ce qui fournit les expressions cherchées de $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$, en fonction de $\frac{\partial w}{\partial u}$, $\frac{\partial w}{\partial v}$, et des dérivées partielles des fonctions données φ, ψ, χ.

Le problème du changement de variables est donc résolu pour les *dérivées premières;* calculons maintenant les *dérivées secondes*.

On opère d'une manière analogue, en différentiant les équations (2) et (3) dont on vient de se servir, et en regardant comme variables indépendantes les *variables anciennes* x, y (¹).

On trouve ainsi

$$(2\ bis) \qquad d^2 w = \frac{\partial^2 w}{\partial u^2} du^2 + 2\frac{\partial^2 w}{\partial u\,\partial v} du\,dv + \frac{\partial^2 w}{\partial v^2} dv^2 + \frac{\partial w}{\partial u} d^2 u + \frac{\partial w}{\partial v} d^2 v,$$

$$(3\ bis) \qquad \begin{cases} d^2 u = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} dx^2 + 2\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x\,\partial y} dx\,dy + \ldots + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} dz^2 + \frac{\partial \varphi}{\partial z} d^2 z, \\ d^2 v = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} dx^2 + \ldots, \\ d^2 w = \frac{\partial^2 \chi}{\partial x^2} dx^2 + \ldots. \end{cases}$$

Portons dans (2 *bis*) les valeurs de $d^2 u$, $d^2 v$, $d^2 w$ tirées de (3 *bis*), ainsi que les valeurs de du, dv tirées de (3); nous obtenons une relation de la forme

$$0 = \mathrm{M}\,dx^2 + \mathrm{N}\,dy^2 + \mathrm{P}\,dz^2 + 2\mathrm{Q}\,dx\,dy + 2\mathrm{R}\,dx\,dz + 2\mathrm{S}\,dy\,dz + \mathrm{T}\,d^2 z,$$

dans laquelle nous remplacerons dz par sa valeur (4), ce qui donne une relation finale de la forme

$$\mathrm{C}\,dx^2 + 2\mathrm{D}\,dx\,dy + \mathrm{E}\,dy^2 + \mathrm{T}\,d^2 z = 0,$$

(¹) C'est-à-dire en supposant $d^2 x = d^2 y = 0$.

où C, D, E, T sont des fonctions de $\frac{\partial w}{\partial u}$, $\frac{\partial w}{\partial v}$, $\frac{\partial^2 w}{\partial u^2}$, $\frac{\partial^2 w}{\partial u\,\partial v}$, $\frac{\partial^2 w}{\partial v^2}$, et des dérivées partielles, premières et secondes, des fonctions données φ, ψ, χ. Si l'on résout par rapport à $d^2 z$, on sait (n° 47) que les coefficients de dx^2, $2\,dx\,dy$, dy^2 sont $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$, en sorte que

$$(6)\qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -\frac{C}{T}, \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} = -\frac{D}{T}, \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -\frac{E}{T},$$

ce qui résout le problème pour les dérivées secondes.

On obtiendrait de même les dérivées troisièmes en différentiant les équations (2 *bis*) et (3 *bis*), et ainsi de suite.

Voici donc la règle qui résume la solution du problème des changements de variables.

90. Règle. — Soient z la fonction et x, y les variables anciennes; w la fonction et u, v les variables nouvelles.

1° On écrit l'équation de différentielle totale entre la fonction et les variables nouvelles, équation que nous appellerons (A) : $dw = \frac{\partial w}{\partial u}\,du + \frac{\partial w}{\partial v}\,dv$.

2° On différentie les équations qui définissent le changement de variables, ce qui donne des équations que nous appellerons (B).

3° On élimine entre (A) et (B) les différentielles des fonction et variables nouvelles dw, du, dv.

On obtient ainsi une relation, (C), entre dz, dx, dy qui donne immédiatement (n° 38) l'expression de $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$ en fonction de $\frac{\partial w}{\partial u}$, $\frac{\partial w}{\partial v}$.

Pour exprimer les dérivées secondes de z, on différentie (A) et (B), et regardant comme variables indépendantes les variables anciennes x et y, entre ces nouvelles relations, (A′), (B′), et les équations (B) et (C) [ou (B) et (A)] on élimine les différentielles premières et secondes des fonction et variables nouvelles dw, du, dv, d^2w, d^2u, d^2v, ainsi que la différentielle première de la fonction ancienne dz : le résultat est une relation (C′) entre d^2z, dx, dy, qui donne immédiatement (n° 47) l'expression de $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$

en fonction des dérivées premières et secondes de w par rapport à u et v.

En différentiant encore (A′) et (B′), et opérant d'une manière analogue, on aurait les dérivées troisièmes, et ainsi de suite.

91. Remarque. — Il importe d'observer qu'on ne s'est pas servi *explicitement,* dans ces calculs, de la relation qui lie z à x et y, on a seulement supposé qu'elle existait; les formules obtenues sont indépendantes de la forme de cette relation. Il en résulte que, si une fonction *inconnue* z, de x, y, satisfait à une équation différentielle donnée

$$F\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \cdots\right) = 0,$$

c'est-à-dire que, si l'on a à résoudre (ou intégrer) une telle équation, on pourra la transformer par un changement de fonction et de variables, sans connaître l'expression de z en x et y. Il suffira, dans le cas du changement de variables considéré plus haut, de remplacer dans F les quantités $x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \cdots$ par leurs valeurs en $u, v, w, \frac{\partial w}{\partial u}, \frac{\partial w}{\partial v}, \cdots$, et l'on aura une équation

$$\Phi\left(u, v, w, \frac{\partial w}{\partial u}, \frac{\partial w}{\partial v}, \cdots\right) = 0,$$

dont la solution w pourra être plus facile à trouver que celle de l'équation primitive $F = 0$.

II. — CAS PARTICULIERS ET EXEMPLES.

---

92. Exemple I. — Soit $z = f(x, y)$; on pose

$$u = y + z, \qquad v = z + x, \qquad w = x + y;$$

et l'on demande d'exprimer $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$ et $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ en fonction des dérivées partielles, premières et secondes, de w par rapport à u et v.

Appliquons la règle : la fonction et les variables nouvelles étant w —, u, v, écrivons

$$(A) \qquad dw = \frac{\partial w}{\partial u}du + \frac{\partial w}{\partial v}dv.$$

Les équations (B), obtenues en différentiant les équations du changement de variables sont

$$(B) \qquad \begin{cases} du = dy + dz, \\ dv = dz + dx, \\ dw = dx + dy, \end{cases}$$

Entre (A) et (B) éliminons du, dv, dw pour former la relation (C) entre dx, dy, dz; il vient

$$dx\left(\frac{\partial w}{\partial v} - 1\right) + dy\left(\frac{\partial w}{\partial u} - 1\right) + dz\left(\frac{\partial w}{\partial u} + \frac{\partial w}{\partial v}\right) = 0;$$

ou

$$(C) \qquad dz = \frac{1 - \frac{\partial w}{\partial v}}{\frac{\partial w}{\partial u} + \frac{\partial w}{\partial v}}dx + \frac{1 - \frac{\partial w}{\partial u}}{\frac{\partial w}{\partial u} + \frac{\partial w}{\partial v}}dy;$$

ce qui donne immédiatement les valeurs cherchées de $\frac{\partial z}{\partial x}$ et $\frac{\partial z}{\partial y}$:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1 - \frac{\partial w}{\partial v}}{\frac{\partial w}{\partial u} + \frac{\partial w}{\partial v}}, \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1 - \frac{\partial w}{\partial u}}{\frac{\partial w}{\partial u} + \frac{\partial w}{\partial v}}.$$

Reste à calculer $\frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y}$; pour cela différentions (A) et (B), en regardant x et y, variables anciennes, comme les variables indépendantes :

$$(A') \qquad d^2 w = \frac{\partial^2 w}{\partial u^2}du^2 + 2\frac{\partial^2 w}{\partial u\, \partial v}du\, dv + \frac{\partial^2 w}{\partial v^2}dv^2 + \frac{\partial w}{\partial u}d^2 u + \frac{\partial w}{\partial v}d^2 v;$$

$$(B') \qquad \begin{cases} d^2 u = d^2 z, \\ d^2 v = d^2 z, \\ d^2 w = 0. \end{cases}$$

Éliminons $d^2 u$, $d^2 v$ et $d^2 w$ entre (A′) et (B′), et remplaçons

du, dv par leurs valeurs (B); il vient :

$$\begin{aligned} 0 = & \frac{\partial^2 w}{\partial u^2}(dy+dz)^2 + 2\frac{\partial^2 w}{\partial u\,\partial v}(dy+dz)(dx+dz) \\ & + \frac{\partial^2 w}{\partial v^2}(dx+dz)^2 + \frac{\partial w}{\partial u}d^2z + \frac{\partial w}{\partial v}d^2z, \end{aligned}$$

ou en ordonnant

$$\begin{aligned} 0 = & d^2z\left(\frac{\partial w}{\partial u}+\frac{\partial w}{\partial v}\right) + \frac{\partial^2 w}{\partial v^2}dx^2 + \frac{\partial^2 w}{\partial u^2}dy^2 \\ & + 2\frac{\partial^2 w}{\partial u\,\partial v}dx\,dy + 2\left(\frac{\partial^2 w}{\partial u^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial u\,\partial v}\right)dy\,dz \\ & + 2\left(\frac{\partial^2 w}{\partial v^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial u\,\partial v}\right)dx\,dz + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial u^2}+2\frac{\partial^2 w}{\partial u\,\partial v}+\frac{\partial^2 w}{\partial v^2}\right)dz^2. \end{aligned}$$

Cette équation n'est pas encore l'équation définitive, parce qu'elle contient non seulement d^2z, dx et dy, mais encore dz: tirons donc dz de (C), suivant la règle, et portons-le dans l'équation ci-dessus : comme nous cherchons l'expression de $\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}$, nous n'aurons besoin que de coefficients de d^2z et de $dx\,dy$. On a ainsi

$$(C')\quad \begin{aligned} 0 = & d^2z\left(\frac{\partial w}{\partial u}+\frac{\partial w}{\partial v}\right) + dx^2(\qquad) + dy^2(\qquad) \\ & + 2\,dx\,dy\left[\frac{\partial^2 w}{\partial u\,\partial v} + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial u^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial u\,\partial v}\right)\frac{1-\frac{\partial w}{\partial v}}{\frac{\partial w}{\partial u}+\frac{\partial w}{\partial v}} + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial v^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial u\,\partial v}\right)\frac{1-\frac{\partial w}{\partial u}}{\frac{\partial w}{\partial u}+\frac{\partial w}{\partial v}}\right. \\ & \left. + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial u^2}+2\frac{\partial^2 w}{\partial u\,\partial v}+\frac{\partial^2 w}{\partial v^2}\right)\frac{\left(1-\frac{\partial w}{\partial u}\right)\left(1-\frac{\partial w}{\partial v}\right)}{\left(\frac{\partial w}{\partial u}+\frac{\partial w}{\partial v}\right)^2}\right]. \end{aligned}$$

Par conséquent on a

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} = -\frac{[\qquad]}{\frac{\partial w}{\partial u}+\frac{\partial w}{\partial v}},$$

en désignant par [ ] le coefficient de $2\,dx\,dy$ dans l'équation (C').

93. Exemple II. — Soit encore z une fonction de x, y; on prend pour variables indépendantes, à la place de x, y, les

quantités

$$u = \varphi(x, y), \qquad v = \psi(x, y),$$

et l'on conserve la fonction z : on demande d'exprimer les dérivées premières et secondes de z par rapport à x, y en fonction des dérivées de z par rapport à u, v.

Les fonction et variables nouvelles sont z —, u, v; écrivons donc

$$\text{(A)} \qquad dz = \frac{\partial z}{\partial u} du + \frac{\partial z}{\partial v} dv.$$

Les équations (B) sont ici

$$\text{(B)} \qquad \left\{ \begin{aligned} du &= \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx - \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy, \\ dv &= \frac{\partial \psi}{\partial x} dx + \frac{\partial \psi}{\partial y} dy. \end{aligned} \right.$$

D'où, en éliminant du et dv :

$$\text{(C)} \qquad dz = dx\left(\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial \psi}{\partial x}\right) + dy\left(\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial \psi}{\partial y}\right),$$

ce qui donne

$$(6) \qquad \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial \psi}{\partial x}, \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial \psi}{\partial y}.$$

Pour calculer les dérivées secondes, différentions (A) et (B), les variables indépendantes étant x et y :

$$\text{(A')} \qquad d^2 z = \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} du^2 + 2\frac{\partial^2 z}{\partial u\, \partial v} du\, dv + \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} dv^2 + \frac{\partial z}{\partial u} d^2 u + \frac{\partial z}{\partial v} d^2 v,$$

$$\text{(B')} \qquad \left\{ \begin{aligned} d^2 u &= \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} dx^2 + 2\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x\, \partial y} dx\, dy + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} dy^2, \\ d^2 v &= \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} dx^2 + \ldots, \end{aligned} \right.$$

d'où, en se servant de (B),

$$\begin{aligned} d^2 z = \frac{\partial^2 z}{\partial u^2}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy\right)^2 \cdots \\ + \frac{\partial z}{\partial u}\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} dx^2 + \ldots\right) + \frac{\partial z}{\partial v}\left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} dx^2 + \ldots\right). \end{aligned}$$

Le second membre ne contenant que dx et dy, et non dz, il

n'y a pas à utiliser (C); il ne reste qu'à ordonner par rapport à dx et dy :

$$d^2 z = dx^2 \left[\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + 2 \frac{\partial^2 z}{\partial u \, \partial v} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \right)^2 + \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \right]$$
$$+ 2\, dx\, dy (\quad) + dy^2 (\quad).$$

Ce qui donne

$$(7) \quad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \dfrac{\partial^2 z}{\partial u^2} \left(\dfrac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + 2 \dfrac{\partial^2 z}{\partial u \, \partial v} \dfrac{\partial \varphi}{\partial x} \dfrac{\partial \psi}{\partial x} + \dfrac{\partial^2 z}{\partial v^2} \left(\dfrac{\partial \psi}{\partial x} \right)^2 + \dfrac{\partial z}{\partial u} \dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \dfrac{\partial z}{\partial v} \dfrac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}, \\ \dfrac{\partial^2 z}{\partial x \, \partial y} = \ldots. \\ \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \ldots. \end{cases}$$

94. Remarque I. — Si l'on demande *inversement* d'exprimer $\frac{\partial z}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial v}, \ldots$ en fonction de $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \ldots$, la méthode générale exige que l'on recommence les calculs, en considérant x et y comme les variables nouvelles, u et v comme les variables anciennes. On peut toutefois se servir des calculs précédents, car les équations (6), linéaires par rapport à $\frac{\partial z}{\partial u}$ et $\frac{\partial z}{\partial v}$, fournissent ces quantités en fonction de $\frac{\partial z}{\partial x}$ et $\frac{\partial z}{\partial y}$; de même, des équations (7), on peut tirer linéairement $\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial u \, \partial v}, \frac{\partial^2 z}{\partial v^2}$. Cette remarque s'applique au cas général.

95. Remarque II. — Dans le cas de l'exemple II, il est peut-être plus court d'employer les dérivées au lieu des différentielles. En effet, z étant considéré comme une fonction de u et de v, qui sont eux-mêmes fonctions de x et y, on a, par la théorie des dérivées :

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x},$$
$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y};$$

ce sont les équations (6) où l'on a écrit $\frac{\partial u}{\partial x}, \ldots$ au lieu de $\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \ldots$, ce qui revient au même, puisque $u = \varphi(x, y)$.

Dérivons ces deux équations successivement par rapport à x

et y, en regardant $\frac{\partial z}{\partial u}$ et $\frac{\partial z}{\partial v}$ comme des fonctions de u et v, qui sont eux-mêmes fonctions de x et y; nous obtenons

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial u^2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + 2\frac{\partial^2 z}{\partial u\,\partial v}\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} = \ldots,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \ldots,$$

c'est-à-dire les équations (7).

96. Exemple III. — Soit $z = f(x, y)$; on prend pour variables indépendantes, à la place de x et y, $u = x$ et $v = \frac{y}{x}$; on demande d'exprimer $\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}$ en fonction de $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, ...

La fonction et les variables nouvelles sont, cette fois, z —, x, y; la fonction et les variables anciennes sont z, u, v. On a

$$\text{(A)} \qquad dz = p\,dx + q\,dy,$$

p et q représentant respectivement $\frac{\partial z}{\partial x}$ et $\frac{\partial z}{\partial y}$ (n° 48).

D'ailleurs les équations du changement de variables

$$x = u, \qquad y = vu$$

donnent

$$\text{(B)} \qquad dx = du, \qquad dy = v\,du + u\,dv.$$

Continuons les différentiations en regardant comme variables indépendantes u et v, variables anciennes; il vient, avec les notations du n° 48,

$$\text{(A')} \qquad d^2 z = r\,dx^2 + 2s\,dx\,dy + t\,dy^2 + p\,d^2 x + q\,d^2 y,$$

$$\text{(B')} \qquad d^2 x = 0, \qquad d^2 y = 2\,du\,dv;$$

d'où, en se servant de (B) pour éliminer dx et dy,

$$d^2 z = r\,du^2 + 2s\,du(v\,du + u\,dv) + t(v\,du + u\,dv)^2 + 2q\,du\,dv.$$

La dérivée $\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}$ est le coefficient de du^2 dans le second membre;

donc

$$(8) \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} = r + 2sv + tv^2,$$

ou, puisque $v = \frac{y}{x}$,

$$\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} = \frac{1}{x^2}(rx^2 + 2sxy + ty^2).$$

97. Exemple IV. — Soit encore $z = f(x, y)$; cette équation définit aussi y comme fonction de x et de z; on demande d'exprimer les dérivées premières et secondes de y par rapport à x et z, à savoir $\frac{\partial y}{\partial x}$, $\frac{\partial y}{\partial z}$, ..., en fonction des dérivées de z par rapport à x et y, à savoir $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$, ..., ou p, q, r, s, t.

La fonction et les variables nouvelles sont z —, x et y; on écrira donc

$$(A) \qquad dz = p\,dx + q\,dy.$$

Quant aux équations (B), il n'y a pas lieu de les écrire, car elles se réduisent à $dx = dx$, $dy = dy$, $dz = dz$.

Résolvons (A) par rapport à dy :

$$(C) \qquad dy = -\frac{p}{q}dx + \frac{1}{q}dz,$$

ce qui donne

$$\frac{\partial y}{\partial x} = -\frac{p}{q}, \qquad \frac{\partial y}{\partial z} = \frac{1}{q}.$$

Pour calculer les dérivées secondes, différentions (A), en regardant comme variables indépendantes x et z, variables anciennes; il vient (puisque $d^2x = d^2z = 0$),

$$r\,dx^2 + 2s\,dx\,dy + t\,dy^2 + q\,d^2y = 0.$$

Enfin, pour obtenir la relation finale entre d^2y, dx et dz, remplaçons dy par sa valeur (C); nous trouvons

$$-q\,d^2y = r\,dx^2 + 2s\,dx\left(-\frac{p}{q}dx + \frac{1}{q}dz\right) + t\left(-\frac{p}{q}dx + \frac{1}{q}dz\right)^2.$$

ce qui donne

$$(9)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} &= -\frac{1}{q}\left(r - 2s\frac{p}{q} + t\frac{p^2}{q^2}\right) = -\frac{1}{q^3}(rq^2 - 2spq + tp^2),\\ \frac{\partial^2 y}{\partial x\,\partial z} &= -\frac{1}{q}\left(\frac{s}{q} - \frac{tp}{q^2}\right) = -\frac{1}{q^3}(qs - pt),\\ \frac{\partial^2 y}{\partial z^2} &= -\frac{t}{q^3}. \end{aligned}\right.$$

98. **Exemple V.** — Considérons maintenant une fonction d'une seule variable, $y=f(x)$, et faisons le changement de variables

$$x = \rho\cos\omega, \qquad y = \rho\sin\omega.$$

En vertu de $y=f(x)$, ρ est fonction de ω; on demande d'exprimer y'_x, y''_x (ou plus simplement y', y'') en fonction de ρ'_ω, ρ''_ω (ou ρ', ρ'').

La fonction et la variable nouvelles sont ρ et ω; écrivons donc

$$(\mathrm{A})\qquad d\rho = \rho'\,d\omega.$$

$$(\mathrm{B})\qquad \left\{\begin{aligned} dx &= d\rho\cos\omega - \rho\sin\omega\,d\omega,\\ dy &= d\rho\sin\omega + \rho\cos\omega\,d\omega. \end{aligned}\right.$$

Entre (A) et (B) éliminons $d\rho$ et $d\omega$; il suffit de diviser membre à membre les deux équations (B), ce qui donne, en tenant compte de (A),

$$(10)\qquad \frac{dy}{dx} = y' = \frac{\rho'\sin\omega + \rho\cos\omega}{\rho'\cos\omega - \rho\sin\omega};$$

c'est l'expression de y' en fonction de ρ'.

Pour calculer y'', différentions (A) et (B) en regardant comme variable indépendante la variable ancienne x; il vient

$$(\mathrm{A}')\qquad d^2\rho = \rho''\,d\omega^2 + \rho'\,d^2\omega,$$

$$(\mathrm{B}')\qquad \left\{\begin{aligned} 0 &= d^2\rho\cos\omega - 2\,d\rho\,d\omega\sin\omega - \rho\cos\omega\,d\omega^2 - \rho\sin\omega\,d^2\omega,\\ d^2y &= d^2\rho\sin\omega + 2\,d\rho\,d\omega\cos\omega - \rho\sin\omega\,d\omega^2 + \rho\cos\omega\,d^2\omega. \end{aligned}\right.$$

D'après la méthode générale, il faut, pour obtenir une relation entre d^2y et dx, éliminer $d\rho$, $d\omega$, $d^2\rho$, $d^2\omega$ et dy entre (A), (B), (A′), (B′); le plus simple est de tirer $d\omega$ et $d\rho$ de (A) et de la première équation (B), ce qui donne :

$$d\omega = \frac{dx}{\mathrm{D}}, \qquad d\rho = \frac{\rho'\,dx}{\mathrm{D}},$$

en posant

$$D = \rho' \cos\omega - \rho \sin\omega.$$

Tirons ensuite $d^2\rho$ et $d^2\omega$ de (B'). Pour cela, multiplions la première équation (B') par $\cos\omega$, la seconde par $\sin\omega$ et ajoutons

$$d^2y \sin\omega = d^2\rho - \rho\, d\omega^2,$$

d'où

$$d^2\rho = d^2y \sin\omega + \rho \frac{dx^2}{D^2}.$$

De même, multiplions la première équation (B') par $\sin\omega$, la seconde par $\cos\omega$, et ajoutons :

$$d^2y \cos\omega = 2\, d\rho\, d\omega + \rho\, d^2\omega,$$

d'où

$$d^2\omega = \frac{1}{\rho}\left(d^2y \cos\omega - 2\rho' \frac{dx^2}{D^2}\right).$$

Portons enfin les valeurs de $d\omega$, $d^2\rho$ et $d^2\omega$ dans (A') :

$$d^2y \sin\omega + \rho \frac{dx^2}{D^2} = \rho'' \frac{dx^2}{D^2} + \frac{\rho'}{\rho}\left(d^2y \cos\omega - 2\rho' \frac{dx^2}{D^2}\right),$$

c'est-à-dire, en multipliant les deux membres par ρ,

$$D\, d^2y = \frac{dx^2}{D^2}(\rho^2 + 2\rho'^2 - \rho\rho''),$$

ce qui donne finalement

$$(11) \qquad y'' = \frac{\rho^2 + 2\rho'^2 - \rho\rho''}{(\rho' \cos\omega - \rho \sin\omega)^3}.$$

99. Corollaire. — D'après cela, l'expression du *rayon de courbure* d'une courbe plane, $\rho = \rho(\omega)$, en coordonnées polaires, s'obtiendra en remplaçant, dans la formule

$$R = \frac{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''},$$

y' et y'' par leurs valeurs (10) et (11); on trouve ainsi, comme au n° 62,

$$R = \frac{(\rho^2 + \rho'^2)^{\frac{3}{2}}}{\rho^2 + 2\rho'^2 - \rho\rho''}.$$

100. Remarque. — Pour trouver l'expression de R en coor-

données polaires, on aurait pu partir de la formule du n° **67** :

$$R = \frac{(dx^2 + dy^2)^{\frac{3}{2}}}{d^2y\,dx - d^2x\,dy},$$

où x et y sont regardées comme fonctions d'une même variable. Or, en posant

$$x = \rho\cos\omega, \qquad y = \rho\sin\omega,$$

on peut regarder x et y comme fonctions de ω, puisque, sur la courbe, ρ est lui-même fonction de ω. On en déduit

$$dx = d\rho\cos\omega - \rho\sin\omega\,d\omega, \qquad dy = d\rho\sin\omega + \rho\cos\omega\,d\omega.$$

Différentions encore, en regardant ω comme la variable indépendante, c'est-à-dire en supposant $d^2\omega = 0$:

$$d^2x = d^2\rho\cos\omega - 2\sin\omega\,d\rho\,d\omega - \rho\cos\omega\,d\omega^2,$$
$$d^2y = d^2\rho\sin\omega + 2\cos\omega\,d\rho\,d\omega - \rho\sin\omega\,d\omega^2.$$

Il suffit maintenant de porter ces valeurs de dx, dy, d^2x, d^2y dans R, pour retrouver :

$$R = \frac{(d\rho^2 + \rho^2\,d\omega^2)^{\frac{3}{2}}}{\rho^2\,d\omega^3 + 2\,d\rho^2\,d\omega - \rho\,d^2\rho\,d\omega} = \frac{\left[\rho^2 + \left(\frac{d\rho}{d\omega}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\rho^2 + 2\left(\frac{d\rho}{d\omega}\right)^2 - \rho\,\frac{d^2\rho}{d\omega^2}}.$$

101. Exemple VI. — Soit $y = f(x)$; on pose $x = \varphi(t)$, et l'on demande d'exprimer les dérivées de y par rapport à x en fonction des dérivées de y par rapport à t.

C'est le plus simple des problèmes de changement de variables, et la méthode générale s'applique sans difficulté. Il est plus court toutefois de se servir des dérivées au lieu des différentielles et de raisonner comme il suit :

Soient y'_t, y''_t, . . . les dérivées de y par rapport à t; soient de même x'_t, x''_t, . . . les dérivées successives de x, c'est-à-dire $\varphi'(t)$, $\varphi''(t)$, . . .; on a évidemment (n° **24**)

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y'_t}{x'_t}.$$

Dérivons les deux membres de cette relation par rapport à x. Pour dériver le second membre, nous le dériverons par rapport

à t et nous multiplierons le résultat par $\frac{dt}{dx}$, c'est-à-dire $\frac{1}{x'_t}$; il vient ainsi

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{x'_t y''_t - y'_t x''_t}{x'^3_t},$$

et de même, en continuant les dérivations,

$$\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{x'_t(x'_t y'''_t - y'_t x'''_t) - 3x''(x'_t y''_t - y'_t x''_t)}{x'^5_t}, \quad \dots$$

102. Exemple VII. — Soit $y = f(x)$; on prend y pour variable indépendante et x pour fonction, et l'on demande d'exprimer les dérivées de y par rapport à x en fonction des dérivées de x par rapport à y.

Il suffit de supposer, dans l'exemple précédent, $t = y$, ce qui donne

$$\frac{dy}{dx} \quad \text{ou} \quad y'_x = \frac{1}{x'_y} \qquad y''_x = -\frac{x''_y}{x'^3_y}, \quad \dots$$

On aurait pu raisonner directement comme il suit. Il est clair que $y'_x = \frac{1}{x'_y}$; dérivons les deux membres par rapport à x : la dérivée du premier est y''; pour trouver celle du second, prenons la dérivée par rapport à y et multiplions par la dérivée de y par rapport à x, c'est-à-dire par $\frac{1}{x'_y}$, il vient

$$y''_x = -\frac{x''_y}{x'^2_y}\,\frac{1}{x'_y} = -\frac{x''_y}{x'^3_y}, \quad \dots$$

Intégration d'une équation différentielle.

103. On rencontre en Physique (Théorie des cordes vibrantes) le problème suivant d'Analyse dont on peut trouver la solution à l'aide d'un changement de variables.

Déterminer la fonction la plus générale u, de deux variables indépendantes x et t, qui satisfasse à l'équation

$$(1) \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad (a = \text{const.}).$$

Conservons l'ancienne fonction u et prenons pour nouvelles

variables indépendantes les quantités

$$\xi = x + at,$$
$$\eta = x - at;$$

cherchons alors ce que devient l'équation (1) après ce changement de variables.

On a, en appliquant la méthode par les dérivées indiquée dans la Remarque II du n° 95,

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial t} = a\frac{\partial u}{\partial \xi} - a\frac{\partial u}{\partial \eta},$$

de même,

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \eta},$$

et, en continuant les dérivations,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a\left(a\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} - a\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\,\partial \eta}\right) - a\left(a\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\,\partial \eta} - a\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\right),$$
$$= a^2\left(\frac{\partial u^2}{\partial \xi^2} - 2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\,\partial \eta} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\right),$$
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + 2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\,\partial \eta} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}.$$

Portons ces valeurs dans l'équation (1); celle-ci se réduit à

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\,\partial \eta} = 0,$$

forme qui s'intègre facilement. En effet, elle exprime que $\frac{\partial u}{\partial \xi}$ est indépendant de η, puisque sa dérivée par rapport à η est nulle; on a donc

$$\frac{\partial u}{\partial \xi} = f(\xi),$$

$f(\xi)$ désignant une fonction de ξ, quelconque d'ailleurs. Remontons aux primitives

$$u = \varphi(\xi) + C,$$

$\varphi(\xi)$ étant une primitive de $f(\xi)$ et C une constante par rapport à ξ, c'est-à-dire une fonction de η, $\psi(\eta)$, d'ailleurs arbitraire. Quant à $\varphi(\xi)$, c'est aussi une fonction arbitraire, comme primitive d'une fonction arbitraire. On a donc enfin, comme solution

la plus générale de l'équation proposée (1),

$$u = \varphi(\xi) + \psi(\eta),$$

c'est-à-dire

$$u = \varphi(x + at) + \psi(x - at),$$

φ et ψ désignant deux fonctions arbitraires.

Ce résultat est utilisé en Physique.

III. — CHANGEMENTS DE VARIABLES PLUS GÉNÉRAUX.

104. Soit toujours z une fonction de deux variables indépendantes x et y; reprenons les formules du changement de variables (où nous écrivons X, Y, Z à la place de u, v, w) :

$$(1) \qquad X = \varphi(x, y, z), \qquad Y = \chi(x, y, z), \qquad Z = \psi(x, y, z).$$

Nous avons vu que les dérivées de z par rapport à x et y s'expriment en fonction des dérivées *de même ordre* (et d'ordres inférieurs) de Z par rapport à X et Y, et réciproquement.

En particulier, si l'on désigne par P et Q les dérivées $\frac{\partial Z}{\partial X}$ et $\frac{\partial Z}{\partial Y}$, P et Q sont des fonctions de x, y, z, p, q; et la forme de ces fonctions est indépendante de la relation entre z —, x et y. (Remarque du n° 91).

Géométriquement, les équations (1) définissent ce qu'on nomme une *transformation ponctuelle,* parce que, à un point x, y, z de l'espace, elles font correspondre un ou plusieurs points X, Y, Z, et réciproquement. Si le point x, y, z décrit une surface s, le point correspondant X, Y, Z décrira une surface S, et l'on dit que s et S sont transformées l'une de l'autre par la transformation (1).

Il est clair qu'une transformation ponctuelle *conserve le contact,* c'est-à-dire transforme deux surfaces tangentes en deux surfaces tangentes. Soient, en effet, s et s' deux surfaces qui se touchent en un point m : c'est dire (n° 48) qu'au point m les valeurs de x, y, z, p et q sont les mêmes pour les deux surfaces. Désignons par M(X, Y, Z) le transformé de m; il résulte de ce

qui précède qu'au point M les valeurs de P et Q seront les mêmes pour les deux surfaces S et S', transformées de s et s', c'est-à-dire que S et S' se touchent en M.

103. Cela posé, au lieu d'un changement de variables ponctuel, considérons le changement de variables plus général :

$$(2) \quad X = \varphi(x, y, z, p, q), \qquad Y = \chi(x, y, z, p, q), \qquad Z = \psi(x, y, z, p, q),$$

où p et q désignent les dérivées partielles de z par rapport à x et y. Si le point x, y, z décrit une surface *donnée*, s, les quantités z, p et q sont des fonctions connues de x et y, de sorte que le point X, Y, Z décrit aussi une surface S dont l'équation s'obtient en éliminant x et y entre les trois relations (2). La *transformation* (2) fait ainsi correspondre à une surface quelconque, s, une surface, S, dite *transformée* de la première; mais ce n'est pas une transformation ponctuelle, car pour déterminer le point X, Y, Z il faut se donner non seulement le point x, y, z sur la surface s, mais encore p et q, c'est-à-dire le plan tangent en ce point à cette surface.

Cherchons maintenant à déterminer le plan tangent en un point de S, c'est-à-dire à exprimer $\frac{\partial Z}{\partial X}$ et $\frac{\partial Z}{\partial Y}$ en fonction des dérivées de z par rapport à x et y : *la méthode générale du changement de variables s'applique sans modification.*

Partons de la relation différentielle entre la fonction et les variables nouvelles :

$$(A) \qquad dz = p\,dx + q\,dy,$$

et différentions les équations (2) du changement de variables, en observant (n° 48) que

$$dp = r\,dx + s\,dy, \qquad dq = s\,dx + t\,dy,$$

r, s, t étant, comme d'ordinaire, $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$. Il vient

$$(B) \quad \begin{cases} dX = \frac{\partial\varphi}{\partial x}dx + \frac{\partial\varphi}{\partial y}dy + \frac{\partial\varphi}{\partial z}dz + \frac{\partial\varphi}{\partial p}(r\,dx + s\,dy) + \frac{\partial\varphi}{\partial q}(s\,dx + t\,dy), \\ dY = \ldots \\ dZ = \ldots \end{cases}$$

Il faut maintenant, selon la règle, éliminer dx, dy, dz entre

(A) et (B); nous tirons pour cela dz de (A), nous le portons dans (B), et nous éliminons dx et dy par le déterminant

$$\begin{vmatrix} dX & \frac{\partial\varphi}{\partial x} + p\frac{\partial\varphi}{\partial z} + r\frac{\partial\varphi}{\partial p} + s\frac{\partial\varphi}{\partial q} & \frac{\partial\varphi}{\partial y} + q\frac{\partial\varphi}{\partial z} + s\frac{\partial\varphi}{\partial p} + t\frac{\partial\varphi}{\partial q} \\ dY & \frac{\partial\chi}{\partial x} + p\frac{\partial\chi}{\partial z} + \dots & \frac{\partial\chi}{\partial y} + \dots \\ dZ & \frac{\partial\psi}{\partial x} + \dots & \frac{\partial\psi}{\partial y} + \dots \end{vmatrix} = 0.$$

Résolvons enfin cette équation par rapport à dZ; les coefficients de dX et dY seront $\frac{\partial Z}{\partial X}$ et $\frac{\partial Z}{\partial Y}$, c'est-à-dire P et Q.

Sans développer les calculs, on voit immédiatement que, *en général,* P et Q dépendent non seulement des dérivées premières p et q, mais encore des dérivées secondes r, s, t. C'est une différence fondamentale avec le cas des transformations ponctuelles; elle subsiste pour les dérivées d'ordre supérieur, c'est-à-dire que les dérivées *secondes* de Z dépendent des dérivées de z jusqu'à l'ordre *trois* et ainsi de suite.

106. Transformations de contact. — Il peut arriver cependant que pour des transformations particulières, c'est-à-dire pour des formes particulières des fonctions φ, χ et ψ, les dérivées P et Q ne dépendent que de p et q et non de r, s, t; on dit, en ce cas, que la transformation (2) est *de contact,* c'est-à-dire conserve le contact. Supposons, en effet, que deux surfaces s et s' se touchent en x_0, y_0, z_0, c'est-à-dire aient, en ce point, mêmes valeurs p_0 et q_0 de p et q; les deux surfaces transformées de s et s' par (2) auront en commun le point

$$X_0 = \varphi(x_0, y_0, z_0, p_0, q_0), \qquad Y_0 = \chi(x_0, \dots), \qquad Z_0 = \psi(x_0, \dots),$$

où elles se toucheront, puisque P et Q, qui ne dépendent que de x, y, z, p, q, auront, en ce point, les mêmes valeurs.

Les transformations de contact conduisent à une conception intéressante des éléments de l'espace.

Soit, en effet, une transformation de contact (T)

$$(\mathrm{T}) \left\{ \begin{array}{l} X = \varphi(x, y, z, p, q), \quad Y = \chi(x, y, z, p, q), \quad Z = \psi(x, y, z, p, q), \\ \text{d'où l'on déduit, puisque (T) est de contact,} \\ \qquad P = \Phi(x, y, z, p, q), \qquad Q = \Psi(x, y, z, p, q). \end{array} \right.$$

Considérons maintenant un point $m(x, y, z)$ de l'espace et une surface passant par ce point; le plan tangent ϖ à la surface en m a pour coefficients p, q, -1. A toutes les surfaces s passant par m et tangentes à ϖ en ce point, la transformation (T) fait correspondre des surfaces S, passant par un point M et tangentes en ce point à un même plan Π; si donc on appelle *élément* de l'espace l'*ensemble* d'un point m et d'un plan ϖ passant par ce point, on peut dire qu'une transformation de contact fait correspondre à un élément (m, ϖ) un ou plusieurs éléments (M, Π), et réciproquement. De plus, toute surface *possédant l'élément* (m, ϖ), c'est-à-dire tangente à ϖ en m, est transformée par (T) en une surface qui possède l'élément correspondant (M, Π). Enfin, l'ensemble des éléments appartenant à une surface est transformé par (T) en l'ensemble des éléments appartenant à une autre surface, à savoir la surface transformée définie au n° **105**.

Analytiquement, la correspondance entre les éléments est établie de la manière suivante.

Le point m étant x, y, z, et le plan ϖ ayant pour équation celle du plan tangent à la surface s, à savoir :

$$\zeta - z = p(\xi - x) + q(\eta - y),$$

(ξ, η, ζ coordonnées courantes); le point M étant de même X, Y, Z, et le plan Π ayant pour équation

$$\zeta - Z = P(\xi - X) + Q(\eta - Y),$$

on a, pour déterminer X, Y, Z, P, Q en fonction de x, y, z, p, q, les équations (T) de la transformation.

On voit qu'on fait maintenant abstraction de la signification de p, q, P, Q comme dérivées; ce sont simplement les coefficients qui figurent dans l'équation des plans composant les éléments.

107. Conséquences. — Dans cette manière de concevoir l'espace, *une surface* sera considérée comme le lieu d'une infinité double d'éléments, chaque élément étant formé par un point et par le plan tangent en ce point; la transformée de la surface par (T) sera le lieu des éléments transformés des premiers, et ce sera une autre surface, comme on l'a observé plus haut (n° **106**).

Une ligne peut être regardée comme la limite d'une surface

ayant la forme d'un fil de diamètre infiniment petit; il est clair qu'à la limite les plans tangents à une pareille surface deviennent les plans tangents à la ligne, c'est-à-dire qu'un élément appartenant à la ligne est formé par un point de celle-ci et par un plan *quelconque* mené par la tangente en ce point. La ligne est ainsi le lieu d'une infinité *double* d'éléments; sa transformée par (T) sera en général une surface, rien ne prouvant *a priori* que ce soit une autre ligne.

Si, par exemple, la ligne est une droite

$$(\mathrm{D}) \qquad \begin{cases} y = ax + m, \\ z = bx + n, \end{cases}$$

un élément sera formé par le point (x, y, z) et un plan quelconque de coefficients p, q, -1 contenant la droite, c'est-à-dire tel que

$$p + aq - b = 0.$$

Pour avoir l'équation en X, Y, Z de la surface transformée de la droite, il faudra éliminer x, y, z, p, q entre la dernière relation, les deux équations (D) de la droite et les trois premières équations (T).

Un point (x, y, z) peut être regardé comme la limite d'une sphère de rayon infiniment petit; c'est donc aussi le lieu d'une infinité *double* d'éléments, formés chacun par le point et par un plan quelconque mené par ce point. Sa transformée est une surface dont l'équation (en X, Y, Z) s'obtient évidemment en éliminant p et q entre les trois premières équations (T).

Soient s une surface, S sa transformée par (T); cherchons la transformée d'une ligne l tracée sur s. Il est clair que l a une infinité simple d'éléments communs avec s, à savoir ceux qui sont formés par un point de l et le plan qui touche s (et par suite l) en ce point; donc la transformée de l est une surface, Λ, qui a une infinité simple d'éléments communs avec S, c'est-à-dire qui touche S en une infinité simple de points, ou encore qui touche S suivant une ligne. Ainsi :

La transformée d'une ligne tracée sur une surface, s, est une surface circonscrite à la transformée de s.

Si deux lignes l et l' se coupent en un point m, elles ont un

élément commun, à savoir celui qui est formé par m et par le plan des tangentes aux deux courbes en ce point; donc *leurs transformées ont un élément commun, c'est-à-dire sont deux surfaces tangentes en un point.*

108. Remarque. — Reprenons la transformation de contact définie par les équations

$$(4)\qquad X = \varphi(x, y, z, p, q),\qquad Y = \chi(x, y, z, p, q),\qquad Z = \psi(x, y, z, p, q)$$

d'où l'on a tiré

$$(4\ bis)\qquad P = \Phi(x, y, z, p, q),\qquad Q = \Psi(x, y, z, p, q).$$

On peut établir que les dérivées secondes R, S, T, de Z par rapport à X et Y, s'expriment en fonction de x, y, z et des dérivées *premières et secondes* de z par rapport à x et y.

Différentions, en effet, les deux premières équations (4); il vient, comme au n° 105,

$$dX = \frac{\partial\varphi}{\partial x}dx + \frac{\partial\varphi}{\partial y}dy + \frac{\partial\varphi}{\partial z}(p\,dx + q\,dy) + \frac{\partial\varphi}{\partial p}(r\,dx + s\,dy) + \frac{\partial\varphi}{\partial q}(s\,dx + t\,dy).$$

$$dY = \ldots.$$

De ces relations on tire dx et dy en fonction linéaire et homogène de dX et dY, les coefficients étant fonctions de x, y, z, p, q, r, s, t. De même, différentions les deux équations (4 *bis*) en observant que dP et dQ sont respectivement

$$R\,dX + S\,dY \quad \text{et} \quad S\,dX + T\,dY;$$

il vient

$$R\,dX + S\,dY = \frac{\partial\Phi}{\partial x}dx + \frac{\partial\Phi}{\partial y}dy + \frac{\partial\Phi}{\partial z}(p\,dx + q\,dy) + \frac{\partial\Phi}{\partial p}(r\,dx + s\,dy) + \frac{\partial\Phi}{\partial q}(s\,dx + t\,dy).$$

$$S\,dX + T\,dY = \frac{\partial\Psi}{\partial x}dx + \ldots.$$

Remplaçons dx et dy par leurs valeurs calculées tout à l'heure en fonction de dX et dY, et égalons, dans les deux membres de chaque équation, les coefficients de dX et de dY; nous obtenons des relations de la forme

$$R, S, T = \text{fonctions de } x, y, z, p, q, r, s, t.$$

On établirait de même que les dérivées troisièmes de Z par rapport à X et Y s'expriment en fonction de x, y, z et des dérivées, jusqu'à l'ordre *trois* inclus, de z par rapport à x et y, et ainsi de suite.

Donnons maintenant des exemples de transformations de contact.

109. Transformation de Legendre. — C'est la transformation

$$X = p, \qquad Y = q, \qquad Z = -z + px + qy. \tag{5}$$

Les équations (B) sont ici

$$\begin{cases} dX = r\,dx + s\,dy, \qquad dY = s\,dx + t\,dy, \\ dZ = +x(r\,dx + s\,dy) + y(s\,dx + t\,dy). \end{cases} \tag{6}$$

Joignons-y (A)

$$dz = p\,dx + q\,dy,$$

et éliminons dx, dy, dz; il vient

$$dZ = x\,dX + y\,dY, \tag{7}$$

d'où

$$P = x, \qquad Q = y. \tag{8}$$

Les dérivées secondes r, s, t ne figurant pas dans P et Q, la transformation est de contact [1].

Remarque I. — La transformation de Legendre est une trans-

---

[1] Si l'on veut exprimer les dérivées secondes R, S et T, il suffit de différentier (7) en prenant pour variables indépendantes les variables anciennes X et Y; on a

$$d^2Z = dx\,dX + dy\,dY,$$

et, en remplaçant dx et dy par leurs valeurs en dX, dY tirées des deux premières équations (6) :

$$d^2Z = \frac{1}{rt - s^2}[dX(t\,dX - s\,dY) + dY(-s\,dX + r\,dY)],$$

d'où

$$R = \frac{t}{rt - s^2}, \qquad S = \frac{-s}{rt - s^2}, \qquad T = \frac{r}{rt - s^2}.$$

formation par polaires réciproques par rapport au paraboloïde

$$2\zeta - \xi^2 - \eta^2 = 0.$$

En effet, le pôle X, Y, Z du plan tangent

$$0 = \zeta - z - p(\xi - x) - q(\eta - y),$$

par rapport à ce paraboloïde, est défini par

$$\frac{-X}{-p} = \frac{-Y}{-q} = \frac{1}{1} = \frac{Z}{-z + px + qy},$$

ce qui donne bien, pour X, Y, Z, les valeurs (5). Il est d'ailleurs évident, *a priori*, que toute transformation par polaires réciproques est une transformation de contact.

Remarque II. — Dans le plan, y étant fonction de x, la transformation de Legendre est

$$X = y', \qquad Y = -y + xy',$$

et l'on trouve

$$\frac{dY}{dX} = x, \qquad \frac{d^2Y}{dX^2} = \frac{1}{y''}.$$

C'est encore une transformation de polaires réciproques par rapport à la parabole $2\eta - \xi^2 = 0$.

110. Transformation de Sophus Lie. — Elle s'écrit sous les deux formes équivalentes :

$$(9) \quad \begin{cases} X + iY = -z - x\dfrac{px + qy}{q - x}, \\ X - iY = \dfrac{y + p}{q - x}, \\ Z = \dfrac{px + qy}{q - x}, \end{cases}$$

ou

$$(9') \quad \begin{cases} X + iY + z + xZ = 0, \\ x(X - iY) + y - Z = 0. \\ Z = \dfrac{px + qy}{q - x}. \end{cases}$$

Pour vérifier qu'elle est de contact, calculons P et Q. A cet

effet, selon la règle, différentions les équations (9') en y remplaçant de suite dz par $(p\,dx + q\,dy)$. Les deux premières donnent

$$(10)\quad \begin{cases} dX + i\,dY + x\,dZ + dx(Z + p) + q\,dy = 0, \\ (dX - i\,dY)x - dZ + dx(X - iY) + dy = 0. \end{cases}$$

Il est inutile de différentier la troisième équation (9'), car les deux relations (10) suffisent pour éliminer dx et dy. En effet, multiplions la seconde par $-q$ et ajoutons à la première; dy disparaît et il reste

$$(dX + i\,dY) - qx(dX - i\,dY) + dZ(x + q) + dx[Z + p - q(X - iY)] = 0.$$

Je dis que le coefficient de dx est nul : il suffit, pour le voir, d'y remplacer Z et $X - iY$ par leurs valeurs tirées de (9). Il reste donc

$$dZ(x + q) = dX(qx - 1) - i\,dY(qx + 1),$$

d'où

$$(11)\qquad P = \frac{qx - 1}{x + q}, \qquad Q = -i\frac{qx + 1}{x + q},$$

ce qui prouve bien que la transformation de Lie est de contact.

Remarque. — Inversement, si l'on se donne X, Y, Z, P, Q, on détermine x, y, z, p, q comme il suit.

Les équations (11) donnent qx et $x + q$, d'où deux systèmes de valeurs pour x et q; la première équation (9') donne z, la seconde donne y et la troisième p, sans ambiguïté dès que x et q sont connus. Donc à un élément x, y, z, p, q correspond, par (9) et (11), un seul élément X, Y, Z, P, Q; inversement, à un élément X, Y, Z, P, Q correspondent deux éléments x, y, z, p, q.

111. Propriété de la transformation de Lie. — Elle change les droites en sphères.

Si, en effet, le point x, y, z décrit la droite

$$(12)\qquad y = ax + m, \qquad z = bx + n,$$

un élément appartenant à la droite sera formé par le point x, y, z et par un plan de coefficients $(p, q, -1)$ passant par ce point et

contenant la droite. On a donc

$$(13) \qquad p + aq - b = 0,$$

en exprimant, ce qui suffit, que le plan est parallèle à la droite (12).

Le lieu du point X, Y, Z, c'est-à-dire la surface transformée de la droite, s'obtiendra en éliminant x, y, z, p, q entre les trois équations (9'), les deux équations (12) et l'équation (13).

Pour faire l'élimination, tirons y, z et p de (12) et (13), en fonction de x et de q, et portons dans les trois équations (9'). Il vient

$$\begin{aligned} X + iY + n + x(Z + b) \qquad &= 0, \\ m - Z \qquad + x(X - iY + a) &= 0. \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots& \end{aligned}$$

Il est inutile d'écrire la troisième équation, qui contiendrait q, car on peut éliminer x entre les deux premières [1]. On trouve ainsi

$$(14) \quad X^2 + Y^2 + X(a+n) + iY(a-n) + Z^2 + Z(b-m) + an - bm = 0;$$

équation d'une sphère, et d'une sphère générale, car l'équation dépend *effectivement* des quatre paramètres a, b, m et n.

On voit ainsi qu'à une droite en x, y, z correspond *une* sphère en X, Y, Z; inversement, à une sphère correspondent *deux* droites : car, se donner la sphère (14), c'est se donner $a+n$, $a-n$, c'est-à-dire a et n; $b-m$ et bm, c'est-à-dire *deux* systèmes de valeurs de b et m. Une des droites se déduit de l'autre en changeant b en $-m$ et m en $-b$; car ce changement n'altère pas $b-m$ et bm.

112. Applications. — En vertu de la transformation de Lie, la géométrie des systèmes de sphères est ramenée à celle des systèmes de droites, et ce seul énoncé fait comprendre toute l'importance de la proposition ci-dessus. Nous en indiquerons plus

---

[1] Plus généralement, si x, y, z décrit une courbe,

$$f(x, y, z) = 0, \qquad g(x, y, z) = 0,$$

la surface transformée s'obtient en éliminant x, y, z entre les deux équations $f = 0$, $g = 0$ et les deux premières équations (9').

tard une conséquence intéressante; bornons-nous ici à quelques remarques.

Soit s une surface réglée, c'est-à-dire admettant une infinité simple de génératrices rectilignes; à ces génératrices, la transformation de Lie fait correspondre des sphères qui, d'après une des remarques du n° 107, touchent, chacune suivant une ligne, la transformée S de s. Ce résultat s'énonce ainsi :

La transformée d'une surface réglée est l'enveloppe d'une série simplement infinie de sphères.

A deux droites qui se coupent correspondent (n° 107) deux sphères tangentes en un point.

Ces deux remarques permettent de transformer la propriété qu'a l'hyperboloïde à une nappe d'admettre deux séries de génératrices rectilignes, telles que les génératrices d'une série rencontrent celles de l'autre; on voit ainsi que :

Il existe une surface Σ (*la transformée de l'hyperboloïde*) *qui est l'enveloppe de deux séries simplement infinies de sphères; chaque sphère d'une série touche chaque sphère de l'autre série.*

L'hyperboloïde est le lieu des droites s'appuyant sur trois droites fixes; donc

La surface Σ *peut être regardée comme l'enveloppe des sphères qui touchent trois sphères fixes.*

La surface Σ est, comme on le verrait directement, du quatrième ordre; on la nomme *cyclide de Dupin;* nous la retrouverons plus tard.

CHAPITRE IV.

FORMATION DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES.

I. — FONCTIONS D'UNE SEULE VARIABLE.

113. Il est souvent avantageux, pour l'étude des fonctions, *de* former les équations différentielles auxquelles elles satisfont : on appelle *équation différentielle* une relation entre une variable, une fonction de cette variable et les dérivées de cette fonction; l'*ordre* d'une équation différentielle est celui de la dérivée d'ordre le plus élevé qui y figure.

Si l'on a

$$y = f(x),$$

on en déduit

$$y' = f'(x),$$

$$\dots\dots\dots\dots$$

$$y^n = f^n(x),$$

et toute combinaison de ces équations fournira une équation différentielle à laquelle satisfera la fonction y; une fonction donnée satisfait donc à une infinité d'équations différentielles de n'importe quel ordre.

Dans les applications, le problème ne se pose pas avec cette généralité; la plupart du temps, la fonction donnée, y, dépend d'un certain nombre de coefficients constants, et l'on se propose de former une équation différentielle à laquelle satisfasse y, *quelles que soient les valeurs de ces coefficients.*

La fonction y, de x, est donc supposée définie par une relation

$$(1) \qquad F(x, y, C_1, C_2, \dots, C_n) = 0,$$

renfermant n constantes; on en déduit, par des dérivations successives,

$$(2) \qquad \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} y' = 0;$$

$$(3) \qquad \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + 2y' \frac{\partial^2 F}{\partial x \, \partial y} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} y'^2 + \frac{\partial F}{\partial y} y'' = 0, \qquad \dots$$

Après n dérivations, on aura $(n+1)$ équations (1), (2), (3), ..., entre lesquelles on éliminera les n quantités C_1, C_2, ..., C_n; le résultat

$$\varphi(x, y, y', y'', \ldots, y^n) = 0$$

sera une équation différentielle d'ordre n [1], vérifiée par la fonction y, quels que soient $C_1, C_2, \ldots, C_n$: elle convient à toutes les fonctions y définies par l'équation (1), où $C_1, \ldots, C_n$ sont des constantes arbitraires. Voici des exemples.

114. Équation différentielle des droites du plan. — La fonction y est définie par

$$y = C_1 x + C_2,$$

C_1 et C_2 étant des constantes arbitraires; la méthode précédente conduit, pour y, à l'équation différentielle évidente

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = 0.$$

115. Équation différentielle des cercles du plan. — La fonction y est définie par

$$x^2 + y^2 + 2\lambda x + 2\mu y + h = 0,$$

λ, μ, h étant des constantes arbitraires. Appliquons la méthode; on a, en dérivant trois fois,

$$\begin{aligned} x + yy' + \lambda + \mu y' &= 0, \\ 1 + yy'' + y'^2 + \mu y'' &= 0, \\ yy''' + 3y'y'' + \mu y''' &= 0. \end{aligned}$$

d'où, en éliminant μ entre les deux dernières relations,

$$y'''(1 + yy'' + y'^2) = y''(yy''' + 3y'y''),$$

c'est-à-dire

$$y'''(1 + y'^2) - 3y'y''^2 = 0.$$

Cette équation exprime que le rayon de courbure est constant;

---

(1) Ce raisonnement montre que l'équation est *au plus* d'ordre n; on verra, dans le Cours de seconde année, que l'ordre est exactement n, lorsque y dépend effectivement de n constantes arbitraires.

car, en écrivant que la dérivée logarithmique de $\frac{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''}$ est nulle, on aurait

$$3\frac{y'y''}{1+y'^2} - \frac{y'''}{y''} = 0.$$

116. Équation différentielle des coniques. — La relation entre y et x peut s'écrire

$$y = ax + b + \sqrt{mx^2 + 2nx + p},$$

a, b, m, n, p étant des constantes arbitraires. Dérivons deux fois :

$$y' = a + (mx + n)(mx^2 + 2nx + p)^{-\frac{1}{2}},$$
$$y'' = m(mx^2 + 2nx + p)^{-\frac{1}{2}} - (mx + n)^2(mx^2 + 2nx + p)^{-\frac{3}{2}},$$

c'est-à-dire

$$y'' = (mx^2 + 2nx + p)^{-\frac{3}{2}}(mp - n^2),$$

d'où

$$(y'')^{-\frac{2}{3}} = (mp - n^2)^{-\frac{2}{3}}(mx^2 + 2nx + p).$$

Trois dérivations successives vont annuler le second membre; l'équation différentielle cherchée prend ainsi la forme simple

$$\left(y''^{-\frac{2}{3}}\right)''' = 0.$$

Dans les paraboles, $m = 0$; il suffit donc de deux dérivations pour annuler le second membre et l'équation différentielle des paraboles est

$$\left(y''^{-\frac{2}{3}}\right)'' = 0.$$

Ces deux équations développées donnent, pour les coniques,

$$-40y'''^3 + 45y''y'''y^{\text{IV}} - 9y''^2y^{\text{V}} = 0;$$

pour les paraboles,

$$5y'''^2 - 3y''y^{\text{IV}} = 0.$$

Remarque. — L'équation différentielle des paraboles signifie, géométriquement, que les tangentes aux courbes diamétrales, aux points où celles-ci coupent la courbe, sont parallèles. En effet, le coefficient angulaire de la tangente à la courbe diamétrale au

point (x, y) d'une courbe plane est (n° 72) $y' - 3\frac{y''^2}{y'''}$; en écrivant qu'il est indépendant de x, c'est-à-dire que sa dérivée est nulle, on trouve l'équation

$$y''(5y'''^2 - 3y''y^{\text{IV}}) = 0.$$

117. Élimination des constantes arbitraires dans le cas de plusieurs équations. — Soient, par exemple, deux fonctions y et z, de x, définies par les deux équations

$$f(x, y, z, C_1, \ldots, C_n) = 0, \qquad \varphi(x, y, z, C_1, \ldots, C_n) = 0.$$

Pour avoir une équation différentielle vérifiée par y, quelles que soient les constantes $C_1, C_2, \ldots, C_n$, on dérivera n fois, par rapport à x, chacune des équations données; on obtiendra ainsi, en tout, $2n+2$ équations, entre lesquelles on éliminera les $2n+1$ quantités $C_1, C_2, \ldots, C_n$ et $z, z', z'', \ldots, z^n$; il restera une équation différentielle d'ordre n en y.

On pourra aussi éliminer z entre les deux équations $f=0$, $\varphi=0$, ce qui ramènera au cas d'une seule équation

$$F(x, y, C_1, \ldots, C_n) = 0,$$

qu'on traitera comme on l'a indiqué plus haut.

II. — FONCTIONS DE PLUSIEURS VARIABLES.

---

118. On opère d'une manière analogue dans le cas d'une fonction de plusieurs variables indépendantes; si l'on a, par exemple, une fonction z, de x et y, définie par l'équation

$$(4) \qquad f(x, y, z, C_1, C_2, \ldots, C_n) = 0,$$

on dérivera successivement par rapport à chacune des deux variables indépendantes. Comme il y a $k+1$ dérivées partielles d'ordre k, quand on aura écrit toutes les dérivées de (4) par rapport à x et y jusqu'à l'ordre h inclusivement, on aura en tout

$$1 + 2 + 3 + \ldots + (h+1) = \frac{1}{2}(h+1)(h+2),$$

équations, et l'on s'arrêtera dès que ce nombre sera supérieur à n. L'élimination de $C_1, C_2, \ldots, C_n$ conduira alors à

$$\frac{1}{2}(h+1)(h+2)-n$$

équations aux dérivées partielles [1] d'ordre h, auxquelles satisfera la fonction z, quelles que soient les constantes $C_1, \ldots, C_n$.

119. Mais, dans le cas des fonctions de plusieurs variables, on peut aller plus loin et éliminer non seulement des *constantes*, mais des *fonctions* arbitraires.

Soit, par exemple, une fonction z, de x et y, définie par

$$F[x, y, z, \varphi_1(\alpha), \varphi_2(\beta), \ldots, \varphi_n(\lambda)] = 0, \tag{5}$$

où F est une fonction donnée; $\alpha, \beta, \gamma, \ldots, \lambda$ des fonctions données de x, y, z; et $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ des fonctions arbitraires. L'équation (5) définit ainsi une infinité de fonctions z ou, géométriquement, une famille de surfaces qui dépend de n fonctions arbitraires.

Pour former une équation aux dérivées partielles vérifiée par z quelles que soient les fonctions $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$, dérivons encore la relation (5) par rapport aux deux variables indépendantes x et y. Il vient :

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial z} p + \frac{\partial F}{\partial \varphi_1} \varphi'_1(\alpha)\left(\frac{\partial \alpha}{\partial x} + p\frac{\partial \alpha}{\partial z}\right) + \ldots = 0,$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial z} q + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = 0,$$

en posant toujours $p = \frac{\partial z}{\partial x}$; $q = \frac{\partial z}{\partial y}$. On obtient ainsi *deux* nouvelles équations, mais on introduit n quantités nouvelles, φ'_1, $\varphi'_2, \ldots, \varphi'_n$. En dérivant une seconde fois, on ajoutera trois équations et toujours n quantités nouvelles, $\varphi''_1, \ldots, \varphi''_n$: quand on

---

[1] Une équation différentielle aux dérivées partielles est une relation entre des variables indépendantes $x, y, \ldots$, une fonction z de ces variables, et les dérivées partielles de z par rapport à $x, y, \ldots$. L'ordre d'une telle équation est celui de la dérivée partielle de z d'ordre le plus élevé qui y figure; ainsi $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = z$ est une équation du second ordre.

aura pris toutes les dérivées de (5) jusqu'à l'ordre h (inclusivement), on aura en tout

$$1+2+\ldots+(h+1)=\frac{1}{2}(h+1)(h+2)$$

équations, entre lesquelles il faudra éliminer

$$\varphi_1,\ \varphi_2,\ \ldots,\ \varphi_n;\quad \varphi'_1,\ \ldots,\ \varphi'_n;\quad \ldots;\quad \varphi^h_1,\ \ldots,\ \varphi^h_n,$$

soit en tout $n(h+1)$ quantités. Donc, lorsque h sera pris assez grand (ce qui est toujours possible) pour que l'on ait

$$\frac{1}{2}(h+1)(h+2)>n(h+1),$$

l'élimination pourra se faire [1], et l'on obtiendra ainsi

$$\frac{1}{2}(h+1)(h+2)-n(h+1),$$

équations aux dérivées partielles d'ordre h [2], vérifiées par la fonction z, quelles que soient les fonctions arbitraires φ.

120. Exemple I. — *Équation aux dérivées partielles des cylindres dont les génératrices sont parallèles à la direction*

$$x=az,\qquad y=bz.$$

L'équation cartésienne de ces cylindres est, comme on sait,

$$x-az=\varphi(y-bz), \tag{6}$$

φ étant une fonction arbitraire; pour former une équation aux dérivées partielles vérifiée par z, dérivons la relation (6), selon la méthode générale, par rapport aux variables indépendantes x et y :

$$1-ap=-bp\varphi',$$
$$-aq=(1-bq)\varphi',$$

d'où, en éliminant φ',

$$(1-ap)(1-bq)=abpq,$$

---

(1) Il suffit de prendre h tel que $(h+1)(h+2-2n)>0$, c'est-à-dire $h=2n-1$, et le nombre des équations aux dérivées partielles est n. Il est possible d'ailleurs qu'on puisse faire l'élimination des fonctions arbitraires avec moins de dérivations.

(2) L'ordre peut être inférieur à h.

c'est-à-dire

$$ap + bq - 1 = 0 \text{ (1)}.$$

121. Exemple II. — *Équation aux dérivées partielles des cônes de sommet donné, a, b, c.*

L'équation cartésienne de ces cônes est

$$\frac{z-c}{x-a} = \varphi\left(\frac{y-b}{x-a}\right).$$

Dérivons par rapport à x et y :

$$\frac{p(x-a)-(z-c)}{(x-a)^2} = -\frac{y-b}{(x-a)^2}\varphi',$$

$$\frac{q}{x-a} = \frac{1}{x-a}\varphi',$$

d'où, en éliminant φ',

$$p(x-a) + q(y-b) = z - c \text{ (2)}.$$

122. Exemple III. — *Équation aux dérivées partielles des fonctions homogènes.*

Une fonction homogène, z, de deux variables x et y, et d'ordre m, est définie par la relation

$$z = x^m \varphi\left(\frac{y}{x}\right),$$

où φ est une fonction arbitraire. Dérivons encore par rapport à x et y :

$$p = m x^{m-1}\varphi - x^{m-2} y \varphi',$$
$$q = x^{m-1}\varphi';$$

d'où, en éliminant φ et φ',

$$p = m x^{m-1}\frac{z}{x^m} - x^{m-2} y \frac{q}{x^{m-1}};$$

c'est-à-dire

$$mz = px + qy.$$

---

(1) Cette équation exprime que le plan tangent à la surface au point x, y, z, plan dont les coefficients (n° 48) sont $p, q, -1$, est parallèle à la direction $a, b, 1$ des génératrices; on aurait donc pu l'écrire directement.

(2) Cette équation exprime que le plan tangent au point x, y, z, c'est-à-dire le plan $p(X-x) + q(Y-y) - (Z-z) = 0$, passe par le point a, b, c.

123. Exemple IV. — *Équation aux dérivées partielles des surfaces réglées dont les génératrices rencontrent l'axe des z.*

Une droite rencontrant Oz a pour équations

$$y = mx, \qquad z = ax + b;$$

pour qu'elle engendre une surface, il faut que m, a, b soient fonctions d'un même paramètre, c'est-à-dire que a et b soient des fonctions de m; $f(m)$ et $\varphi(m)$. L'équation de la surface engendrée est alors

$$(7) \qquad z = xf\left(\frac{y}{x}\right) + \varphi\left(\frac{y}{x}\right).$$

Pour former une équation vérifiée par z, quelles que soient les fonctions f et φ, dérivons par rapport à x et y :

$$p = f - \frac{y}{x^2}(xf' + \varphi'),$$

$$q = \frac{1}{x}(xf' + \varphi'),$$

d'où, en éliminant $xf' + \varphi'$,

$$(8) \qquad p + q\frac{y}{x} = f\left(\frac{y}{x}\right).$$

La fonction φ a disparu [1]; il reste à faire disparaître f. Dérivons encore (8) par rapport à x et y [2]; nous obtenons

$$r + s\frac{y}{x} - q\frac{y}{x^2} = -\frac{y}{x^2}f',$$

$$s + t\frac{y}{x} + q\frac{1}{x} = \frac{1}{x}f'.$$

---

(1) L'équation (8) exprime que le plan tangent à la surface au point x, y, z (n° 48) est parallèle à la direction qui a pour paramètres directeurs $1, \frac{y}{x}, f\left(\frac{y}{x}\right)$, c'est-à-dire $1, m, a$. En d'autres termes elle exprime que ce plan est parallèle à la génératrice de la surface qui passe par le point de contact, ce que l'on savait *a priori*, puisque le plan contient la génératrice. On aurait donc pu écrire (8) directement.

(2) On pose, comme d'habitude,

$$r = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \qquad s = \frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y}, \qquad t = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}.$$

Éliminons enfin f' entre ces deux relations; il vient

$$rx^2 + 2sxy + ty^2 = 0:$$

c'est l'équation cherchée.

On aurait pu l'obtenir autrement; en effet, l'équation (7) montre que, si l'on prend pour variables indépendantes $x = u$ et $\frac{y}{x} = v$, à la place de x et y, on a

$$\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} = 0,$$

quelles que soient les fonctions f et φ. Transformons cette équation différentielle en revenant aux variables x et y; la formule (8) du n° **96** nous donne

$$\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} = \frac{1}{x^2}(rx^2 + 2sxy + ty^2).$$

L'équation différentielle est donc bien

$$rx^2 + 2sxy + ty^2 = 0.$$

124. Élimination des fonctions arbitraires dans le cas de plusieurs équations. — Si l'on a, par exemple, deux fonctions, z et t, de deux variables indépendantes x, y définies par deux équations contenant n fonctions arbitraires, $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ (¹), pour former une équation différentielle à laquelle satisfasse z, quelles que soient les fonctions φ_i, on prendra encore les dérivées partielles, par rapport à x et y, des deux équations données jusqu'à l'ordre h inclus : on aura ainsi en tout

$$2\frac{1}{2}(h+1)(h+2)$$

équations, entre lesquelles on éliminera : 1° les n fonctions φ et leurs dérivées $\varphi'_1, \ldots, \varphi'_n, \ldots, \varphi_1^{(h)}, \ldots, \varphi_n^{(h)}$ jusqu'à l'ordre h, soit $n(h+1)$ quantités; 2° la fonction t et ses dérivées partielles

(¹) Comme plus haut, les $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ sont des fonctions *arbitraires* respectivement de n quantités α, β, .. , λ, qui elles-mêmes sont des fonctions données de x, y, z, t; ainsi

$$\varphi_1 = \varphi_1(\alpha), \quad \ldots, \quad \varphi_n = \varphi_n(\lambda).$$

jusqu'à l'ordre h, soit $\frac{1}{2}(h+1)(h+2)$ quantités. On devra donc prendre h assez grand pour que

$$\frac{1}{2}(h+1)(h+2) > n(h+1),$$

ce qui est toujours possible (*voir* le n° **119**).

Un *cas particulier* intéressant est celui où $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ sont des fonctions arbitraires de la seconde fonction t, *seule*. Dans cet ordre d'idées, on se bornera à indiquer deux exemples; le cas plus général donnerait lieu à des calculs analogues.

125. Exemple I. — *Équation aux dérivées partielles des surfaces réglées.* — Les équations d'une droite étant

$$(9) \qquad \begin{cases} x + az + \alpha = 0, \\ y + bz + \beta = 0, \end{cases}$$

cette droite engendrera une surface si a, b, α, β sont des fonctions d'un paramètre t. Les deux équations (9) définissent alors z et t comme fonctions *des deux variables indépendantes x et y*, et l'on demande de former l'équation aux dérivées partielles que vérifie z, quelles que soient les fonctions α, β, a, b, de t.

A cet effet, dérivons successivement, par rapport aux variables indépendantes x et y, les équations (9); nous obtenons

$$(9') \qquad \begin{cases} 1 + a\dfrac{\partial z}{\partial x} + (a'z + \alpha')\dfrac{\partial t}{\partial x} = 0, \\ a\dfrac{\partial z}{\partial y} + (a'z + \alpha')\dfrac{\partial t}{\partial y} = 0, \end{cases}$$

$$(9'') \qquad \begin{cases} b\dfrac{\partial z}{\partial x} + (b'z + \beta')\dfrac{\partial t}{\partial x} = 0, \\ 1 + b\dfrac{\partial z}{\partial y} + (b'z + \beta')\dfrac{\partial t}{\partial y} = 0, \end{cases}$$

en désignant par a', b', α', β' les dérivées de a, b, α, β par rapport à t.

Entre les deux équations (9′) éliminons $(a'z + \alpha')$; il vient

$$(10) \qquad \frac{1 + a\dfrac{\partial z}{\partial x}}{a\dfrac{\partial z}{\partial y}} = \frac{\left(\dfrac{\partial t}{\partial x}\right)}{\left(\dfrac{\partial t}{\partial y}\right)}.$$

De même les deux équations (9″) donnent

$$\frac{b\dfrac{\partial z}{\partial x}}{1+b\dfrac{\partial z}{\partial y}} = \frac{\left(\dfrac{\partial t}{\partial x}\right)}{\left(\dfrac{\partial t}{\partial y}\right)};$$

d'où, par élimination du quotient $\dfrac{\partial t}{\partial x} : \dfrac{\partial t}{\partial y}$,

$$\left(1+a\frac{\partial z}{\partial x}\right)\left(1+b\frac{\partial z}{\partial y}\right) = ab\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y},$$

c'est-à-dire

$$a\frac{\partial z}{\partial x} + b\frac{\partial z}{\partial y} + 1 = 0. \tag{11}$$

Cette équation n'est pas l'équation différentielle en z cherchée, puisqu'elle contient encore les fonctions arbitraires a et b, de t; pour obtenir une nouvelle relation, dérivons-la par rapport aux variables indépendantes x, y; il vient

$$a\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + b\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} + \left(a'\frac{\partial z}{\partial x} + b'\frac{\partial z}{\partial y}\right)\frac{\partial t}{\partial x} = 0,$$

$$a\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} + b\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + \left(a'\frac{\partial z}{\partial x} + b'\frac{\partial z}{\partial y}\right)\frac{\partial t}{\partial y} = 0;$$

d'où, en éliminant $a'\dfrac{\partial z}{\partial x} + b'\dfrac{\partial z}{\partial y}$,

$$\frac{a\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} + b\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}}{a\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} + b\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}} = \frac{\left(\dfrac{\partial t}{\partial x}\right)}{\left(\dfrac{\partial t}{\partial y}\right)}. \tag{11'}$$

Or, en vertu de (10), puis de (11),

$$\frac{\left(\dfrac{\partial t}{\partial x}\right)}{\left(\dfrac{\partial t}{\partial y}\right)} = \frac{1+a\dfrac{\partial z}{\partial x}}{a\dfrac{\partial z}{\partial y}} = -\frac{b}{a}. \tag{12}$$

On a ainsi, en portant cette valeur dans (11′),

$$a^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2ab\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} + b^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0, \tag{13}$$

nouvelle équation qui contient encore a et b. Les quatre équations (9), (11), (13) ne suffisent pas pour éliminer a, b, α, β; il

faut une relation de plus, que nous obtiendrons de la même manière, en dérivant (13) par rapport à x et y :

$$a^2 \frac{\partial^3 z}{\partial x^3} + 2ab \frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} + b^2 \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2} + \mathrm{M} \frac{\partial t}{\partial x} = 0,$$

$$a^2 \frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} + 2ab \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2} + b^2 \frac{\partial^3 z}{\partial y^3} + \mathrm{M} \frac{\partial t}{\partial y} = 0,$$

M désignant la dérivée, par rapport à t, du premier membre de (13); on en conclut, en éliminant M et en recourant encore à l'équation (12) :

$$\frac{a^2 \frac{\partial^3 z}{\partial x^3} + 2ab \frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} + b^2 \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2}}{a^2 \frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} + 2ab \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2} + b^2 \frac{\partial^3 z}{\partial y^3}} = \frac{\left(\frac{\partial t}{\partial x}\right)}{\left(\frac{\partial t}{\partial y}\right)} = -\frac{b}{a},$$

ce qui s'écrit

$$(14) \qquad a^3 \frac{\partial^3 z}{\partial x^3} + 3a^2 b \frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} + 3ab^2 \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2} + b^3 \frac{\partial^3 z}{\partial y^3} = 0,$$

et l'équation cherchée s'obtiendra en éliminant le rapport $\frac{a}{b}$ entre (13) et (14)

126. Remarque. — On aurait pu arriver plus simplement à ce résultat. On a en effet, sur la surface réglée, quelles que soient les variables indépendantes choisies (n° **42**),

$$d^2 z = r\,dx^2 + 2s\,dx\,dy + t\,dy^2 + p\,d^2 x + q\,d^2 y,$$

et, par une nouvelle différentiation :

$$d^3 z = \frac{\partial^3 z}{\partial x^3} dx^3 + 3 \frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} dx^2\,dy + 3 \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2} dx\,dy^2 + \frac{\partial^3 z}{\partial y^3} dy^3$$
$$+ 3r\,dx\,d^2 x + 3s(d^2 x\,dy + dx\,d^2 y) + 3t\,dy\,d^2 y + p\,d^3 x + q\,d^3 y.$$

Appliquons ces formules au cas où l'on se déplace, à partir d'un point quelconque, x_0, y_0, z_0, de la surface réglée, sur la génératrice rectiligne qui passe par ce point : il n'y a plus alors qu'une seule variable indépendante, x par exemple ; y et z sont des fonctions de x, et les deux équations précédentes fournissent encore les valeurs correspondantes de $d^2 z$ et $d^3 z$, pourvu qu'on remplace, dans les seconds membres, $d^2 x$ et $d^3 x$ par zéro, et dy, $d^2 y$, $d^3 y$ par leurs valeurs en fonction de dx.

Or, sur la génératrice considérée, y et z sont des fonctions linéaires de x, de la forme $mx+n$ et $m'x+n'$, de sorte que d^2y, d^2z, d^3y, d^3z sont nuls, puisque, par hypothèse, d^2x et d^3x le sont. Les équations ci-dessus, qui donnent d^2z et d^3z deviennent alors :

$$0 = r\,dx^2 + 2s\,dx\,dy + t\,dy^2,$$

$$0 = \frac{\partial^3 z}{\partial x^3}dx^3 + 3\frac{\partial^3 z}{\partial x^2\,\partial y}dx^2\,dy + 3\frac{\partial^3 z}{\partial x\,\partial y^2}dx\,dy^2 + \frac{\partial^3 z}{\partial y^3}dy^3,$$

et elles doivent être vérifiées simultanément, en tout point x_0, y_0, z_0 de la surface réglée, pour une valeur convenable du rapport $\frac{dy}{dx}$. L'élimination de ce rapport conduit donc à une équation entre les dérivées secondes et troisièmes de z, vérifiée en tout point de toute surface réglée, et l'on retombe ainsi sur la conclusion du numéro précédent.

127. Exemple II. — *Équation aux dérivées partielles des surfaces développables.* — On nomme *surface développable* l'enveloppe d'un plan mobile dont les coefficients dépendent *d'un seul paramètre t*. L'équation du plan mobile étant

$$z = ax + by + c, \tag{15}$$

où a, b, c sont des fonctions de t, l'équation de la surface s'obtiendra en éliminant t entre la relation (15) et sa dérivée par rapport à t (¹)

$$0 = a'x + b'y + c'. \tag{16}$$

Les deux équations (15) et (16) définissent z et t comme fonctions des variables indépendantes x et y; pour former l'équation différentielle en z, dérivons-les par rapport à x et y. Il vient, en dérivant (15),

$$(15')\qquad \left\{\begin{aligned} &-\frac{\partial z}{\partial x} + a + (a'x + b'y + c')\frac{\partial t}{\partial x} = 0,\\ &-\frac{\partial z}{\partial y} + b + (a'x + b'y + c')\frac{\partial t}{\partial y} = 0,\end{aligned}\right.$$

(¹) On reviendra sur ce point dans la théorie des enveloppes de surfaces.

ou, en tenant compte de (16),

$$(17)\qquad \begin{cases} -\dfrac{\partial z}{\partial x} + a = 0, \\ -\dfrac{\partial z}{\partial y} + b = 0. \end{cases}$$

Il est inutile de dériver (16); ce calcul introduirait a'', b'', c'', qui ne figurent pas dans (17) ni dans ses dérivées, et qu'il faudrait ensuite éliminer. Dérivons donc les équations (17); nous obtenons

$$-\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + a'\frac{\partial t}{\partial x} = 0, \qquad -\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} + b'\frac{\partial t}{\partial x} = 0,$$

$$-\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} + a'\frac{\partial t}{\partial y} = 0, \qquad -\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + b'\frac{\partial t}{\partial y} = 0,$$

d'où, en éliminant a' et b',

$$\frac{\left(\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right)}{\left(\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}\right)} = \frac{\left(\dfrac{\partial t}{\partial x}\right)}{\left(\dfrac{\partial t}{\partial y}\right)} = \frac{\left(\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}\right)}{\left(\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right)}.$$

On a donc

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}\right)^2,$$

c'est-à-dire

$$rt - s^2 = 0.$$

C'est l'équation différentielle cherchée.

CHAPITRE V.

SÉRIES.

I. — DÉFINITIONS; GÉNÉRALITÉS.

128. Soit une suite indéfinie de quantités réelles

$$u_1,\quad u_2,\quad \ldots,\quad u_n,\quad \ldots.$$

Considérons les sommes

$$\begin{aligned} s_1 &= u_1, \\ s_2 &= u_1 + u_2, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ s_n &= u_1 + u_2 + \ldots + u_n, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Si la suite $s_1, s_2, \ldots, s_n, \ldots$ tend (n° 1) vers une limite, S, on dit que la série

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots$$

est *convergente* et a pour somme S. Une série non convergente est dite *divergente*.

Si la série converge, c'est qu'on peut, par définition (n° 1), étant donnée une quantité $\frac{1}{2}\varepsilon$ aussi petite qu'on veut, assigner un nombre n tel que l'on ait

$$\operatorname{mod}(s_{n+p} - \mathrm{S}) < \frac{1}{2}\varepsilon,$$

pour toute valeur nulle ou positive de p.

En particulier on a

$$\operatorname{mod}(s_n - \mathrm{S}) < \frac{1}{2}\varepsilon,$$

d'où, en observant que le module d'une somme ou d'une différence est plus petit que la somme des modules :

$$\operatorname{mod}(s_{n+p} - s_n) = \operatorname{mod}[(s_{n+p} - \mathrm{S}) - (s_n - \mathrm{S})] < \frac{1}{2}\varepsilon + \frac{1}{2}\varepsilon = \varepsilon.$$

En d'autres termes, si une série converge on peut, étant donnée une quantité ε aussi petite qu'on veut, assigner un nombre n tel que l'on ait, quel que soit l'entier positif p,

$$\mathrm{mod}(s_{n+p} - s_n) < \varepsilon;$$

ce qu'on écrit aussi :

$$\mathrm{mod}(u_{n+1} + u_{n+2} + \ldots + u_{n+p}) < \varepsilon.$$

La *réciproque* de cette proposition est vraie, c'est-à-dire que, si l'on peut ainsi déterminer n, la série proposée converge : nous ne donnerons pas la démonstration, qui est assez longue, mais n'offre aucune difficulté. Nous n'aurons d'ailleurs pas besoin de cette réciproque.

129. Conséquences immédiates de la définition. — 1° *Pour qu'une série converge, il est nécessaire que le terme général tende vers zéro,* car

$$u_{n+p} = s_{n+p} - s_{n+p-1},$$

et les inégalités nécessaires

$$\mathrm{mod}(s_{n+p} - \mathrm{S}) < \frac{1}{2}\varepsilon, \qquad \mathrm{mod}(s_{n+p-1} - \mathrm{S}) < \frac{1}{2}\varepsilon,$$

entraînent, comme au n° **128**,

$$\mathrm{mod}\, u_{n+p} = \mathrm{mod}[(s_{n+p} - \mathrm{S}) - (s_{n+p-1} - \mathrm{S})] < \varepsilon.$$

2° *Une série à termes positifs, pour laquelle les sommes* $s_1, s_2, \ldots, s_n, \ldots$ *restent inférieures, quel que soit* n, *à un nombre fixe* M, *est convergente.*

Car une quantité variable s_n, qui *croît* constamment sans pouvoir dépasser un nombre fixe M, a une limite.

3° *Une série à termes positifs dont les termes sont inférieurs ou égaux aux termes de même rang d'une série convergente à termes positifs est convergente.*

Car, si M est la somme de la seconde série, les sommes $s_1, s_2, \ldots, s_n$, prises dans la première, sont évidemment inférieures à M.

4° *Une série à termes positifs et négatifs converge si la série des valeurs absolues de ses termes converge.*

Car, si s_p et $-s_q$ sont les sommes des p termes positifs et des $q = n - p$ termes négatifs, compris dans les n premiers termes de la proposée, l'hypothèse est que $s_p + s_q$ a une limite finie L. Il en résulte que s_p et s_q ont séparément des limites finies A et B, puisque chacune de ces quantités croît en demeurant inférieure à L. Or

$$s_n = s_p - s_q,$$

d'où

$$\lim s_n = \lim(s_p - s_q) = \lim s_p - \lim s_q = A - B,$$

ce qui montre que la proposée converge et a pour somme A — B. La réciproque n'est pas vraie, c'est-à-dire que la proposée peut converger sans que la série des valeurs absolues converge. Un exemple, classique dans les Cours d'Algèbre, est celui de la série *harmonique alternée* $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots$, qui converge, alors que la série *harmonique* $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots$ diverge.

5° *Si l'on multiplie par des nombres positifs ou négatifs, compris entre deux limites* m et M, *les termes d'une série convergente,* $u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots$, *à termes positifs, on obtient une nouvelle série convergente,* $a_1 u_1 + \ldots + a_n u_n + \ldots$; *et la série des valeurs absolues des termes converge également.*

Car, si μ est la plus grande des quantités mod m et mod M, on a

$$\text{mod}(a_n u_n) < \mu u_n.$$

Les termes de la nouvelle série sont ainsi, en valeur absolue, inférieurs aux termes de même rang de la série convergente à termes positifs $\mu(u_1 + \ldots + u_n + \ldots)$; la série $\Sigma\,\text{mod}(a_n u_n)$ est donc convergente (3°) et il en est de même de la série $\Sigma a_n u_n$ (4°).

6° Soient deux séries convergentes, de sommes S et S' :

(S) $$u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots,$$

(S') $$u'_1 + u'_2 + \ldots + u'_n + \ldots.$$

Considérons la série

$$(S'') \qquad (u_1+u'_1)+(u_2+u'_2)+\ldots+(u_n+u'_n)+\ldots.$$

On a

$$s''_n = s_n + s'_n,$$

d'où

$$\lim s''_n = \lim(s_n+s'_n) = \lim s_n + \lim s'_n.$$

La série (S″) est donc convergente et a pour somme $S+S'$; c'est-à-dire qu'en ajoutant terme à terme des séries convergentes *en nombre fini*, on obtient une série convergente égale à leur somme.

7° Soit une série S *à termes positifs*, $u_1+\ldots+u_n+\ldots$. Groupons autrement les termes sans changer leur ordre; nous obtenons une série S′ :

$$(S') \qquad u_1+(u_2+u_3)+\ldots+(u_k+\ldots+u_n+\ldots).$$

Si S′ converge, S converge également et a même somme, car la somme d'un nombre quelconque de termes consécutifs de S (à partir de u_1) est égale à la somme de termes consécutifs de S′, plus une fraction du terme suivant de S′ : ce terme tendant vers zéro, puisque S′ converge, la proposition est établie.

Séries à termes positifs.

130. Les principales propriétés des séries à termes positifs, et notamment les règles de convergence les plus importantes, ont été établies dans le Cours de Mathématiques spéciales; on se bornera ici à quelques indications rapides.

1° *Lorsqu'une série à termes positifs converge, on peut, sans changer ni la convergence ni la somme de la série, y modifier arbitrairement l'ordre des termes.*

Soient en effet s_n et s'_n les sommes des n premiers termes dans la série proposée et dans la série modifiée; S la somme de la proposée. Il est clair que $s'_n < S$, et par suite la série modifiée converge (n° **129**, 2°) et a une somme, S′, évidemment telle que $S' \leqq S$. De même on a $s_n < S'$, et par suite $S \leqq S'$.

Donc, par comparaison,

$$S = S'. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

2° *Règles principales de convergence.* — On se contentera de les rappeler, en renvoyant au Cours de Mathématiques spéciales pour les démonstrations.

Si, à partir d'un certain rang, le produit $n^\alpha u_n$ est compris entre deux nombres fixes, la série est convergente pour $\alpha > 1$; divergente pour $\alpha \leqq 1$.

Si, à partir d'un certain rang, le rapport $u_{n+1} : u_n$ reste inférieur à un nombre fixe plus petit que l'unité, la série converge; si ce rapport reste supérieur à un nombre fixe, plus grand que l'unité, la série diverge.

Si, à partir d'un certain rang, l'expression $\sqrt[n]{u_n}$ reste inférieure à un nombre fixe plus petit que l'unité, la série converge; si cette expression reste supérieure à un nombre fixe plus grand que l'unité, la série diverge.

Séries à termes imaginaires.

131. Une série $u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots$, où $u_n = a_n + ib_n$ est dite *convergente* si les deux séries

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots,$$
$$b_1 + b_2 + \ldots + b_n + \ldots$$

sont convergentes; la somme de la proposée est, *par définition,* $\Sigma a_n + i\Sigma b_n$.

Une série est dite *absolument convergente* si la série des modules de ses termes

$$\Sigma\sqrt{a_n^2 + b_n^2}$$

est convergente. Cette définition s'applique aussi aux séries réelles à termes positifs et négatifs, le module étant alors, comme d'ordinaire, la valeur absolue du terme.

Quand la série des modules converge, la proposée converge

également, et même les séries Σa_n et Σb_n sont *absolument convergentes*. Écrivons, en effet,

$$u_n = \rho_n(\cos\varphi_n + i\sin\varphi_n),$$

la série à termes positifs $\Sigma\rho_n$ étant convergente, les séries $\Sigma\rho_n\cos\varphi_n$ et $\Sigma\rho_n\sin\varphi_n$ sont absolument convergentes (n° 129, 5°) puisque $\cos\varphi_n$ et $\sin\varphi_n$ sont compris entre -1 et $+1$. C. Q. F. D.

132. Théorème. — *On n'altère pas la valeur d'une série absolument convergente en changeant l'ordre de ses termes.*

Démontrons-le d'abord pour une série à termes réels.

La série des valeurs absolues des termes étant convergente, la série des termes positifs et celle des termes négatifs sont séparément convergentes (n° 129, 4°), et de plus si A et — B sont leurs sommes respectives, la proposée a pour somme A — B (*ibid.*). Or, si l'on modifie l'ordre des termes, la série des termes positifs a toujours pour somme A (n° 130, 1°); de même celle des termes négatifs a toujours pour somme — B, et par suite la somme de la série modifiée est *toujours* A — B.

Considérons maintenant une série absolument convergente de terme général imaginaire, $u_n = a_n + ib_n$; on a vu (n° 131) que les deux séries Σa_n et Σb_n convergent *absolument* : si donc M et N sont leurs sommes, ces sommes sont indépendantes de l'ordre des termes, comme on vient de l'établir, et la proposée a pour somme

$$\Sigma a_n + i\,\Sigma b_n = M + Ni,$$

quel que soit l'ordre des termes. C. Q. F. D.

Corollaires. — 1° Si une série est absolument convergente on peut, sans changer sa valeur, *grouper* les termes à volonté. Par exemple, la série

$$u_1 + (u_2 + u_4) + (u_3 + u_5 + u_7) + (u_6 + u_8 + u_9 + u_{11}) + \ldots$$

a même somme que $u_1 + u_2 + u_3 + \ldots$.

Car, si les termes sont réels, on a, en désignant par s_p et $-s_q$ les sommes des termes positifs et des termes négatifs de la proposée qui figurent dans les n premiers termes de la série nouvelle,

et en appelant s'_n la somme de ces n premiers termes,

$$s'_n = s_p - s_q,$$

d'où

$$\lim s'_n = \lim s_p - \lim s_q = A - B,$$

quel que soit l'ordre dans lequel se présentent les termes des sommes s_p et s_q.

Si les termes sont imaginaires, ce raisonnement s'applique séparément aux séries absolument convergentes formées par les parties réelles et par les parties imaginaires des termes, et par suite à la série totale.

2° Inversement, si l'on *décompose* le terme général d'une série :

$$u_n = u'_n + u''_n + \ldots,$$

et si la nouvelle série

$$u'_1 + u''_1 + \ldots + u'_2 + u''_2 + \ldots + u'_n + u''_n + \ldots$$

est absolument convergente, elle a même valeur que l'ancienne ; car, en vertu du corollaire précédent, on peut grouper les termes en

$$(u'_1 + u''_1 + \ldots) + (u'_2 + u''_2 + \ldots) + \ldots + (u'_n + u''_n + \ldots),$$

ce qui redonne la série primitive.

133. Multiplication de deux séries absolument convergentes. — *Si deux séries*

$$(s) \qquad u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots,$$

$$(t) \qquad v_1 + v_2 + \ldots + v_n + \ldots,$$

de sommes S *et* T, *sont absolument convergentes, la série* $\Sigma u_p v_q$, *formée par les produits deux à deux de leurs termes, écrits dans un ordre quelconque, est absolument convergente et a pour somme* ST.

Posons en effet

$$s_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n,$$

$$t_n = v_1 + v_2 + \ldots + v_n,$$

et prenons dans la nouvelle série, $\Sigma u_p v_q$, un nombre quel-

conque, m, de termes, assez grand toutefois pour contenir tous les termes du produit $s_n t_n$. Soit Σ'_m la somme des termes employés; on a

$$\Sigma'_m = s_n t_n + u_\alpha v_\beta + u_\gamma v_\delta + \ldots + u_\lambda v_\mu,$$

α et β (et de même γ, δ; ..., λ, μ) désignant deux indices, dont l'un au moins est supérieur à n. Si maintenant U_α et V_α sont les modules de u_α et v_α, on aura

$$\operatorname{mod}(\Sigma'_m - s_n t_n) = \operatorname{mod}(u_\alpha v_\beta + \ldots + u_\lambda v_\mu) \leqq U_\alpha V_\beta + \ldots + U_\lambda V_\mu,$$

et, *a fortiori*, en désignant par $n+p$ le plus grand des indices α, β, ..., μ,

$$\begin{aligned}\operatorname{mod}(\Sigma'_m - s_n t_n) \leqq\ & (U_1 + U_2 + \ldots + U_{n+p})(V_{n+1} + \ldots + V_{n+p}) \\ & + (V_1 + V_2 + \ldots + V_{n+p})(U_{n+1} + \ldots + U_{n+p}).\end{aligned}$$

Cela posé, faisons tendre m, et par suite n vers l'infini; $U_1 + \ldots + U_{n+p}$ et $V_1 + \ldots + V_{n+p}$ tendent vers S et T; $U_{n+1} + \ldots + U_{n+p}$ et $V_{n+1} + \ldots + V_{n+p}$ tendent vers zéro, quel que soit p, en vertu de la convergence admise des séries ΣU_n et ΣV_n (n° 128); par suite on aura, si m est pris assez grand,

$$\operatorname{mod}(\Sigma'_m - s_n t_n) < \varepsilon,$$

ε étant aussi petit qu'on veut. Donc Σ'_m a pour limite celle de $s_n t_n$, c'est-à-dire ST, quel que soit l'ordre des termes.

C. Q. F. D.

On peut établir que le théorème est encore vrai si (s) est absolument et (t) simplement convergente.

131. Une série est dite *semi-convergente* si elle converge et si la série des modules de ses termes diverge.

Exemple : la série réelle $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots$.

Si une série à termes tous réels est semi-convergente, je dis : 1° qu'elle contient des termes positifs et des termes négatifs en nombre infini; 2° que la série des termes positifs et celle des termes négatifs ont séparément des sommes infinies; il suffit évidemment de démontrer le second point.

Soient, en effet, s_p et $-s_q$ les sommes des p termes positifs et

des $q = n - p$ termes négatifs compris dans les n premiers termes de la proposée s; on a, en désignant par s_n et S_n la somme des n premiers termes de s et de la série S des modules,

$$s_n = s_p - s_q,$$
$$S_n = s_p + s_q;$$

d'où

$$s_p = \frac{1}{2}(S_n + s_n), \qquad s_q = \frac{1}{2}(S_n - s_n).$$

Lorsque n augmente indéfiniment, s_n a une limite finie, puisque la proposée converge; S_n tend vers l'infini, puisque la série des modules (à termes positifs) diverge; donc s_p et s_q croissent au delà de toute limite, c'est-à-dire que la série des termes positifs et celle des termes négatifs divergent toutes deux.

C. Q. F. D.

135. **Théorème.** — *On peut donner une infinité de valeurs à une série semi-convergente (réelle ou imaginaire) en y changeant l'ordre des termes.*

Soit

$$(s) \qquad u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots$$

une telle série; on a, pour le terme général,

$$u_n = a_n + ib_n.$$

Posons

$$\operatorname{mod} u_n = U_n, \qquad \operatorname{mod} a_n = A_n, \qquad \operatorname{mod} b_n = B_n.$$

Il est évident que

$$U_n \leqq A_n + B_n,$$

et puisque, par hypothèse, la série ΣU_n diverge, il en est de même, *a fortiori*, de $\Sigma(A_n + B_n)$; ceci exige que *l'une* des séries ΣA_n ou ΣB_n diverge, car si elles convergeaient toutes deux, $\Sigma(A_n + B_n)$ convergerait (n° 129, 6°). Supposons, par exemple, que ΣA_n soit divergente; comme Σa_n converge, en vertu de la définition même de la convergence de s, cette série, Σa_n, est semi-convergente. Elle a, par suite (n° 134), des termes positifs

$$c_1, \quad c_2, \quad \ldots, \quad c_p, \quad \ldots,$$

et des termes négatifs

$$d_1, \quad d_2, \quad \ldots, \quad d_q, \quad \ldots,$$

dont les sommes sont séparément infinies.

Cela posé, soit M un nombre quelconque, positif par exemple; prenons, dans la série des termes positifs c_i, assez de termes, et juste assez, pour que leur somme dépasse M; cela est possible, puisque la série Σc_n a une somme infinie. Prenons ensuite, dans la série des termes négatifs d_i, assez de termes, et juste assez, pour ramener la somme précédente au-dessous de M; puis des termes positifs pour dépasser de nouveau M, et ainsi de suite.

Les sommes successives ainsi obtenues oscilleront de part et d'autre de M dont elles se rapprocheront d'ailleurs indéfiniment; en effet, la différence entre l'une d'elles et M est moindre, en valeur absolue, que le dernier terme employé c_i ou d_i, et ces termes tendent vers zéro, puisque la série Σa_n, formée par les termes c_i et d_i (pris dans leur ordre primitif) est convergente.

Donc enfin, si l'on modifie de cette manière l'ordre des termes de la série Σa_n, celle-ci aura pour somme M, et la série

$$\Sigma u_n = \Sigma(a_n + ib_n)$$

aura la somme $M + Ni$, M étant un nombre quelconque.

C. Q. F. D.

II. — SÉRIES DONT LES TERMES SONT FONCTIONS D'UNE VARIABLE.

---

136. Convergence uniforme. — Soit une série

(S) $$u_1 + u_2 + \ldots,$$

dont les termes sont des fonctions d'une même variable *réelle* x. Si elle converge pour la valeur x de cette variable, on pourra prendre N assez grand pour que l'expression

$$R_n(x) = u_{n+1}(x) + u_{n+2}(x) + \ldots$$

ait son module inférieur à ε, pour toute valeur de n égale ou supérieure à N [1]; ce nombre N sera, en général, une fonction de x et de ε.

Supposons que la série converge pour toutes les valeurs de x comprises entre a et b; on dit qu'elle est *uniformément convergente* dans cet intervalle lorsque, étant donné ε aussi petit qu'on veut, on peut assigner un nombre N, tel que l'on ait

$$\operatorname{mod} R_n(x) < \varepsilon,$$

pour toutes les valeurs de n supérieures ou égales à N, *et pour toutes les valeurs de x comprises entre a et b.*

En d'autres termes, et c'est là le point capital, le nombre N ne doit dépendre que de ε, et non de x, si l'on veut que la série soit uniformément convergente entre a et b.

137. Remarque I. — Un raisonnement superficiel pourrait faire croire que toute série convergente, quand x est compris entre a et b, est uniformément convergente dans cet intervalle. En effet, puisque la série converge pour la valeur x, il existe un nombre N, fonction de x et de ε, tel que $\operatorname{mod} R_n(x) < \varepsilon$, lorsque $n \geqq N$. Soit $N(\varepsilon)$ le plus grand de tous les nombres $N(x, \varepsilon)$ obtenus en laissant ε fixe et en faisant varier x entre a et b; on aura évidemment, quel que soit x dans cet intervalle, $\operatorname{mod} R_n(x) < \varepsilon$, lorsque $n \geqq N(\varepsilon)$. Le nombre $N(\varepsilon)$ ne dépendant que de ε, il semble ainsi que la série soit uniformément convergente; mais ce raisonnement est faux parce qu'il suppose que parmi les quantités $N(x, \varepsilon)$, en nombre illimité, qu'on obtient en laissant ε fixe et en faisant varier x entre a et b,

---

[1] Car on a vu (n° 128) que l'on peut assigner N tel que

$$\operatorname{mod}(u_{N+1} + \ldots + u_{N+p}) < \frac{\varepsilon}{2},$$

quel que soit p; en particulier, si n est supérieur à N,

$$\operatorname{mod}(u_{N+1} + \ldots + u_n) < \frac{\varepsilon}{2},$$

d'où

$$\operatorname{mod}(u_{n+1} + \ldots + u_{N+p}) = \operatorname{mod}[(u_{N+1} + \ldots + u_{N+p}) - (u_{N+1} + \ldots + u_n)] < 2\frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon;$$

c'est-à-dire, puisque p est aussi grand que l'on veut, $\operatorname{mod} R_n < \varepsilon$.

il y en a une, finie, qui est supérieure à toutes les autres, ou encore que ces quantités ont une limite supérieure finie (¹).

D'ailleurs, il est aisé de donner un exemple simple de série non uniformément convergente. Soit, par exemple, la série (dont chaque terme est entre crochets) :

$$[f(2)-f(3)]+[f(3)-f(4)]+\ldots+[f(n)-f(n+1)]+\ldots,$$

où l'on a posé

$$f(n)=\frac{(n-1)x}{(x^2+1)^n}.$$

Elle converge quel que soit x. En effet, pour $x=0$, tous les termes sont nuls; pour x différent de zéro, l'exponentielle $(x^2+1)^n$, à base plus grande que 1, est, comme on sait, infiniment grande par rapport à $n-1$, lorsque n augmente indéfiniment; il en résulte que $f(n)$ tend vers zéro, et l'on en conclut immédiatement que la série proposée converge et a pour somme $f(2)$, c'est-à-dire $\frac{x}{(x^2+1)^2}$. En particulier, elle converge quand x est compris dans un intervalle qui contient 0, l'intervalle de 0 à 1 par exemple; je dis qu'elle n'est pas uniformément convergente dans cet intervalle. On a, en effet,

$$\begin{aligned}R_{n-1}(x) &= u_n(x)+u_{n+1}(x)+\ldots\\ &=[f(n+1)-f(n+2)]+[f(n+2)-f(n+3)]+\ldots,\\ &=f(n+1)=\frac{nx}{(x^2+1)^{n+1}},\end{aligned}$$

et je dis qu'il est impossible d'assigner un nombre N, fonction de ε seul, tel qu'on ait, pour $n \geqq N$ et pour x compris entre 0 et 1 :

$$\frac{nx}{(x^2+1)^{n+1}}<\varepsilon.$$

(¹) Il peut arriver, en effet, que des quantités en nombre illimité, et qui sont toutes finies, n'aient pas de limite supérieure finie. Soit, par exemple, $N(x)$ un nombre tel que $N(0)$ soit nul et que $N(x)$, pour $x>0$, soit égal au plus grand entier contenu dans $\frac{1}{x}$; les nombres $N(x)$ sont tous finis, quel que soit x, mais n'ont pas de limite supérieure, car on peut toujours prendre x assez petit pour que $\frac{1}{x}$, et, par suite, $N(x)$, dépasse toute quantité donnée.

En effet, cette inégalité devant être vérifiée si petite que soit la valeur positive de x, le serait en particulier pour $x = \frac{1}{\sqrt{n}}$; de sorte qu'on aurait, pour toutes les valeurs de n supérieures à N,

$$\frac{\sqrt{n}}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}} < \varepsilon,$$

ce qui est impossible, puisque, si l'on fait croître n indéfiniment, le premier membre tend vers $\frac{\sqrt{n}}{e}$, c'est-à-dire augmente indéfiniment. La série proposée n'est donc pas uniformément convergente entre 0 et 1 et, plus généralement, dans tout intervalle qui contient 0.

138. **Remarque II.** — Une série étant donnée, il est en général difficile de reconnaître si elle est, ou non, uniformément convergente, puisqu'on ne peut obtenir que dans des cas exceptionnels soit l'expression de $R_n(x)$, soit même une limite supérieure du module de cette quantité.

Cependant, on pourra toujours affirmer que la série est uniformément convergente, dans un intervalle ab, si ses termes, à partir d'un certain rang et pour toutes les valeurs de x comprises entre a et b, sont constamment inférieurs, *en valeur absolue*, aux termes d'une série à termes positifs, convergente et *numérique*, c'est-à-dire dont les termes ne contiennent pas la variable x.

On a, en effet, en désignant par $R_n(x)$ et ρ_n la somme des termes qui suivent le $n^{\text{ième}}$ dans les deux séries

$$\text{mod}\, R_n < \rho_n,$$

et l'on peut prendre N assez grand pour que ρ_n (et par suite $\text{mod}\, R_n$) soit inférieur à ε, dès que $n \geqq N$, puisque la série de comparaison est convergente. Cette série étant d'ailleurs *numérique*, le nombre N ainsi déterminé ne dépend que de ε, ce qui démontre la proposition.

Cette remarque est d'une fréquente application.

139. C'est dans le Calcul intégral et la Théorie des fonctions

d'une variable imaginaire qu'on verra l'importance de la notion de convergence uniforme. Nous ne sommes pas encore en mesure de l'étendre aux séries dont les termes sont fonctions d'une variable imaginaire, puisque nous n'avons pas encore défini ces fonctions; toutefois, si $z = x + yi$, on sait ce que représente z^n lorsque n est entier, car, par la formule du binome,

$$z^n = (x + iy)^n = x^n + nix^{n-1}y + \ldots + (iy)^n$$

Dès lors, on sait ce qu'il faut entendre par une série de la forme

$$a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots + a_n z^n + \ldots,$$

z et les coefficients a_0, a_1, ... (lesquels sont indépendants de z) étant réels ou imaginaires.

On dira que cette série est *uniformément convergente* pour les valeurs de z comprises dans une région, R, du plan lorsque, étant donné ε, on pourra trouver un nombre N, fonction de ε seul, tel qu'on ait

$$\text{mod}\,R_n(z) = \text{mod}(a_{n+1}z^{n+1} + a_{n+2}z^{n+2} + \ldots) < \varepsilon,$$

pour toutes les valeurs de $n \geqq N$ et pour toutes les valeurs de z, ou $x + yi$, dont l'*affixe* (c'est-à-dire le point de coordonnées x, y) est situé dans la région R.

140. Remarque. — Soient A_n et ρ les modules de a_n et de z; si le terme général de la série des modules, $A_n \rho^n$, reste inférieur, pour ρ compris entre ρ_0 et ρ_1, au terme général d'une série numérique convergente à termes positifs, la série des modules est uniformément convergente dans l'intervalle de ρ_0 à ρ_1 (Remarque II, n° 138). Je dis que la série proposée, $\Sigma a_n z^n$, est alors uniformément convergente dans la couronne comprise entre deux cercles ayant pour centre commun l'origine, et ρ_0 et ρ_1 pour rayons; car, par hypothèse,

$$A_{n+1}\rho^{n+1} + A_{n+2}\rho^{n+2} + \ldots < \varepsilon,$$

pour $n \geqq N(\varepsilon)$, et pour $\rho_0 < \rho < \rho_1$. Donc, *a fortiori*,

$$\text{mod}(a_{n+1}z^{n+1} + a_{n+2}z^{n+2} + \ldots) < \varepsilon,$$

pour $n \geqq N(\varepsilon)$, et pour $\rho_0 < \text{mod}\,z < \rho_1$. C. Q. F. D.

Les séries $a_0 + a_1 z + \ldots + a_n z^n + \ldots$ se nomment *séries de puissances;* elles jouissent de propriétés importantes qu'on va exposer.

Séries de puissances.

141. Cercle de convergence. — Soit la série de puissances

$$(\mathrm{S}) \qquad a_0 + a_1 z + \ldots + a_n z^n + \ldots;$$

désignons toujours par ρ et A_n les modules de z et de a_n, la série des modules est

$$A_0 + A_1 \rho + \ldots + A_n \rho^n + \ldots.$$

Admettons qu'on puisse donner à ρ une valeur (non nulle) telle que $A_n \rho^n$ ne croisse pas indéfiniment avec n; pour des valeurs plus petites de ρ, la même condition sera satisfaite *a fortiori;* il en résulte que les valeurs de ρ, pour lesquelles $A_n \rho^n$ ne croît pas indéfiniment avec n, sont celles qui restent comprises entre o et une limite supérieure, R, qui, d'ailleurs, peut être infinie.

Dès lors, pour $\rho < R$, $A_n \rho^n$ ne croît pas indéfiniment avec n; pour $\rho > R$, $A_n \rho^n$ croît indéfiniment; pour $\rho = R$, il y a doute.

Voici des exemples.

1° Série $1 + \frac{z}{1} + \frac{z^2}{2} + \ldots + \frac{z^n}{n} + \ldots$. Il est clair que, pour $\rho > 1$, le terme général $\frac{\rho^n}{n}$, de la série des modules, devient infini pour n infini; pour $\rho < 1$, il devient nul. Donc $R = 1$, et d'ailleurs, pour $\rho = 1$, le terme $\frac{\rho^n}{n}$ tend vers zéro quand n tend vers l'infini.

2° Série $1 + z + 2z^2 + \ldots + nz^n + \ldots$. Le terme $n\rho^n$ croît indéfiniment avec n si $\rho > 1$, et tend vers zéro si $\rho < 1$. Donc encore $R = 1$; pour $\rho = 1$, le terme $n\rho^n$ croît indéfiniment avec n.

Le cercle décrit de l'origine des coordonnées, O, comme centre avec le rayon R se nomme *cercle de convergence* de la série (S), en raison des propriétés suivantes :

142. Théorème I. — *La série* (S) *est :* 1° *absolument conver-*

gente à l'intérieur du cercle de convergence; 2° *uniformément convergente dans tout cercle intérieur au premier.*

Soient, en effet, x, y les coordonnées d'un point intérieur au cercle de convergence; la valeur correspondante de z est $x+yi$, et son module, ρ, est, d'après l'hypothèse, inférieur à R. Désignons par R' un nombre compris entre ρ et R; on a

$$A_n \rho^n = A_n R'^n \left(\frac{\rho}{R'}\right)^n;$$

or, par hypothèse, $A_n R'^n$ ne croît pas indéfiniment avec n, c'est-à-dire reste, quel que soit n, inférieur à une limite M; donc

$$A_n \rho^n < M\left(\frac{\rho}{R'}\right)^n.$$

Par suite, le terme général de la série des modules est inférieur au terme de même rang d'une progression géométrique, dont la raison $\frac{\rho}{R'}$ est inférieure à l'unité, puisque R' est supposé supérieur à ρ. La série des modules est donc convergente, ou, si l'on veut, la série (S) est *absolument* convergente dans le cercle considéré, c'est-à-dire pour les valeurs $x+yi$, de z, telles que le point de coordonnées x, y soit intérieur à ce cercle.

Reste à établir que la convergence est *uniforme*. Nous allons montrer qu'elle l'est lorsque z reste à l'intérieur d'un cercle, de même centre, O, et de rayon R'', plus petit que R, mais aussi voisin de R qu'on veut.

On a en effet, comme plus haut, en désignant par R' un nombre compris entre R'' et R,

$$A_n \rho^n < M\left(\frac{\rho}{R'}\right)^n \quad \text{et \textit{a fortiori}} \quad < M\left(\frac{R''}{R'}\right)^n,$$

puisque, par hypothèse, $\rho < R''$. Le module du terme général de la proposée reste donc inférieur au terme, $M\left(\frac{R''}{R'}\right)^n$, d'une série numérique (progression géométrique) convergente, pour toutes les valeurs de ρ inférieures à R''; par suite (Remarque du n° 140) la série primitive (S) est uniformément convergente à l'intérieur d'un cercle de centre O et de rayon R''. C. Q. F. D.

Remarques. — 1° Si le point z est à l'extérieur du cercle de convergence, la série (S) est divergente, car on a vu que, pour $\rho > R$, le module du terme général croît avec n au delà de toute limite (n° **141**).

2° Sur le cercle de convergence, la série peut converger ou diverger. Par exemple, la série

$$1 + \frac{z}{1} + \frac{z^2}{2} + \ldots + \frac{z^n}{n} + \ldots,$$

dont le cercle de convergence (n° **141**) a l'unité pour rayon, diverge pour $z = 1$ (série harmonique), et converge pour $z = -1$ (série harmonique alternée).

3° Le rayon du cercle de convergence peut être nul; comme, par exemple, pour la série

$$1 + z + 1.2\, z^2 + \ldots + 1.2 \ldots n\, z^n + \ldots,$$

car c'est seulement pour $\rho = 0$ que le terme $1.2 \ldots n\, \rho^n$ ne croît pas indéfiniment avec n.

143. Théorème II. — *Les séries* (S'), (S''), ..., *obtenues en prenant les dérivées successives des termes de la série* (S), *ont même cercle de convergence que celle-ci.*

Il suffit de le démontrer pour la série (S') :

(S') $$a_1 + 2a_2 z + \ldots + n\, a_n z^{n-1} + \ldots,$$

c'est-à-dire d'établir que le module, $n A_n \rho^{n-1}$, du terme général, croît indéfiniment avec n, si $\rho > R$, et reste, au contraire, fini si $\rho < R$.

Soit d'abord $\rho > R$; on peut écrire

$$n A_n \rho^{n-1} = \frac{n}{\rho} (A_n \rho^n),$$

et les deux facteurs du second membre augmentent indéfiniment avec n, car pour $\rho > R$, $A_n \rho^n$ tend vers l'infini (n° **141**).

Soit $\rho < R$; on a, en désignant par R' un nombre compris entre ρ et R, et en se rappelant que $A_n R'^n$ reste, quel que soit n, inférieur à un nombre fixe, M,

$$n A_n \rho^{n-1} = \frac{n}{\rho} \left(\frac{\rho}{R'}\right)^n (A_n R'^n) < M \frac{n}{\rho} \left(\frac{\rho}{R'}\right)^n.$$

Or, le produit $\frac{n}{\rho}\left(\frac{\rho}{R'}\right)^n$ tend vers zéro, pour $n=\infty$, si $\rho < R'$, comme on le voit en prenant les logarithmes népériens [1]; le module du terme général reste donc fini. C. Q. F. D.

144. Théorème III. — *La série de puissances* (S) *est une fonction continue de la variable z dans le cercle de convergence.*

On dit que la série de puissances $f(z)$ est continue pour $z = z_0$ lorsque, étant donnée une quantité ε aussi petite qu'on veut, on peut assigner un nombre positif η tel que l'on ait

$$\operatorname{mod}[f(z_0+h)-f(z_0)] < \varepsilon$$

pour toutes les valeurs de h dont le module est inférieur à η.

Cela revient à dire que $\operatorname{mod}[f(z)-f(z_0)]$ reste $<\varepsilon$ pour toutes les valeurs z dont l'affixe est à l'intérieur d'un cercle, décrit de z_0 comme centre avec η pour rayon.

La fonction est *continue dans une région* du plan si elle est continue pour tous les points z_0 dont l'affixe est dans cette région. Cette définition s'applique aux polynomes en z, qui sont évidemment continus dans tout le plan.

La continuité de la série de puissances, $f(z)$, résulte aisément de l'*uniformité* de la convergence.

On a, en effet, en désignant par n un entier, laissé provisoirement arbitraire,

$$f(z) = a_0 + a_1 z + \ldots + a_n z^n + R_n(z) = \varphi(z) + R_n(z);$$

d'où, en désignant par z_0 un point quelconque intérieur au cercle de convergence,

$$f(z_0+h) - f(z_0) = [\varphi(z_0+h) - \varphi(z_0)] + [R_n(z_0+h) - R_n(z_0)].$$

Prouvons maintenant que, étant donné ε, on peut assigner η tel que, pour $\operatorname{mod} h < \eta$, le module du premier membre reste infé-

---

[1] On a

$$\log\frac{n}{\rho}\left(\frac{\rho}{R'}\right)^n = -\log\rho + \log n - n(\log R' - \log\rho) = \log n - An - B, \ldots$$

avec $A > 0$, puisque $\rho < R'$. Or le terme $-An$ l'emporte, pour n très grand, sur le terme $\log n$; le logarithme du produit considéré tend donc vers $-\infty$, et le produit lui-même tend vers zéro.

rieur à ε; il suffira pour cela d'établir que, pour $\operatorname{mod} h < \eta_1$, les modules des deux quantités

$$\varphi(z_0 + h) - \varphi(z_0) \quad \text{et} \quad R_n(z_0 + h) - R_n(z_0)$$

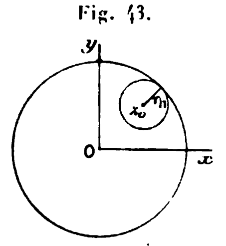
restent inférieurs à $\frac{1}{2}\varepsilon$.

Or : 1° en vertu de l'uniformité de la convergence, on peut prendre n assez grand (et fonction de ε seul) pour que l'on ait, quel que soit le point z, intérieur au cercle de convergence,

$$\operatorname{mod} R_n(z) < \frac{\varepsilon}{4}.$$

En particulier, si l'on suppose successivement $z = z_0$ et $z = z_0 + h$, on sera sûr que le point $z_0 + h$ est intérieur au cercle de convergence s'il reste à l'intérieur du petit cercle décrit de z_0 comme centre et tangent au cercle de convergence (*fig.* 43).

Fig. 43.



c'est-à-dire si $\operatorname{mod} h$ reste inférieur à η_1, η_1 désignant le rayon de ce petit cercle. On aura alors, avec cette hypothèse,

$$(\alpha) \qquad \operatorname{mod} R_n(z_0) \quad \text{et} \quad \operatorname{mod} R_n(z_0 + h) < \frac{\varepsilon}{4},$$

d'où

$$\operatorname{mod}[R_n(z_0 + h) - R_n(z_0)] < 2\frac{\varepsilon}{4} = \frac{\varepsilon}{2},$$

pour toute valeur de h de module inférieur à η_1.

2° $\varphi(z)$, somme d'un nombre *fini* de termes continus, est évidemment une fonction continue dans tout le cercle, et en particulier pour $z = z_0$; donc, on peut trouver un nombre η_2 tel que

$$(\beta) \qquad \operatorname{mod}[\varphi(z_0 + h) - \varphi(z_0)] < \frac{\varepsilon}{2},$$

pour toute valeur de h de module inférieur à η_2.

Soit alors η la plus petite des quantités η_1 et η_2; les inégalités (α) et (β) subsistent *a fortiori* pour toute valeur de h de module inférieur à η; et la quantité η ayant pu être ainsi assignée, le théorème est établi, c'est-à-dire que la série $f(z)$ est continue en tout point z_0, intérieur au cercle de convergence.

143. Théorème IV. — *Les séries* (S′), (S″), ... *sont les dérivées successives de* (S), *par rapport à la variable* z, *pour toutes les valeurs de cette variable comprises dans le cercle de convergence.*

On a, en effet, en représentant toujours la série par $f(z)$,

$$f(z+h) = a_0 + a_1(z+h) + \ldots + a_n(z+h)^n + \ldots.$$

Je dis que l'on peut écrire le second membre, en développant les binomes et supprimant les parenthèses,

$$(1) \quad a_0 + a_1 z + a_1 h + \ldots + a_n z^n + n a_n z^{n-1} h + \ldots + a_n h^n + \ldots.$$

Il suffit, pour l'établir, de prouver (corollaire 2°, n° 132) que cette nouvelle série (1) est absolument convergente, c'est-à-dire, en désignant par A_n, ρ et η les modules de a_n, z et h, de démontrer la convergence de la série

$$(2) \quad A_0 + A_1\rho + A_1\eta + \ldots + A_n\rho^n + nA_n\rho^{n-1}\eta + \ldots + A_n\eta^n + \ldots,$$

ou encore (n° 129, 7°) de la série, où l'on a groupé les termes de la précédente,

$$(3) \qquad A_0 + A_1(\rho+\eta) + \ldots + A_n(\rho+\eta)^n + \ldots.$$

Cette série (3) converge si $\rho+\eta$ est inférieur au rayon R du cercle de convergence, c'est-à-dire si η est au plus égal à la plus courte distance du point z, de module ρ, à la circonférence de ce cercle. Si donc h est de module assez petit, la série (3) et, par suite, la série (2) convergent, et la série (1) est absolument convergente et représente $f(z+h)$.

En vertu de la convergence absolue de cette série (1), on peut écrire, en changeant l'ordre des termes,

$$f(z+h) = a_0 + a_1 z + \ldots + a_n z^n + \ldots + h(a_1 + 2a_2 z + \ldots)$$
$$+ \text{ termes ayant } h^2 \text{ en facteur;}$$

d'où

$$\frac{f(z+h)-f(z)}{h} = (a_1 + 2a_2 z + \ldots + na_n z^{n-1} + \ldots) + h(\qquad),$$

et l'on voit que pour $h = 0$ la limite du premier membre, c'est-à-dire ce qu'on peut appeler la *dérivée de la série imaginaire* $f(z)$, est la série (S') [1]. C. Q. F. D.

III. — FONCTIONS EXPONENTIELLE ET CIRCULAIRES.

---

146. L'Algèbre élémentaire ne définit e^x que pour des valeurs réelles de x [2]; on sait que

$$(1) \qquad e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \ldots + \frac{x^n}{1.2\ldots n} + \ldots.$$

On définira e^z, pour des valeurs imaginaires de la variable z, par la série de puissances

$$(2) \qquad e^z = 1 + \frac{z}{1} + \ldots + \frac{z^n}{n!} + \ldots;$$

---

(1) On donnera plus tard, dans le Calcul intégral, une autre démonstration de ce théorème.

(2) L'importance du nombre e en Analyse a sa source dans le calcul connu que l'on fait pour trouver la dérivée de a^x. On a en effet

$$(a^x)' = \lim a^x\left(\frac{a^h - 1}{h}\right).$$

Si l'on pose $a^h - 1 = \varepsilon$, d'où $h = \log_a(1+\varepsilon)$, il vient

$$(a^x)' = \lim a^x \frac{\varepsilon}{\log_a(1+\varepsilon)} = \lim a^x \frac{1}{\log_a(1+\varepsilon)^{\frac{1}{\varepsilon}}}.$$

Or, pour $\varepsilon = 0$, $(1+\varepsilon)^{\frac{1}{\varepsilon}}$ tend vers e, de sorte que

$$(a^x)' = a^x \frac{1}{\log_a e}.$$

Si $a = e$, $\log_a e = 1$, et par suite $(e^x)' = e^x$.

C'est cette propriété d'être identique à sa dérivée qui constitue l'importance de la fonction exponentielle, et l'on voit que, à ce point de vue, e s'est présenté comme la limite, pour $\varepsilon = 0$, de $(1+\varepsilon)^{\frac{1}{\varepsilon}}$.

cette définition, qui coïncide avec celle de e^x pour x réel, permet, comme on va le voir, d'étendre au cas d'une variable imaginaire les propriétés établies en Algèbre élémentaire.

147. Cercle de convergence. — Le rayon du cercle de convergence de la série de puissances (2) est *infini;* c'est-à-dire que le terme général $\frac{\rho^n}{n!}$ de la série des modules reste fini, quel que soit ρ, quand n augmente indéfiniment.

En effet, ce terme est le terme général de la série convergente réelle, égale à e^ρ, $1+\frac{\rho}{1}+\frac{\rho^2}{1.2}+\ldots$; il a donc pour limite zéro, quel que soit ρ, pour n infini.

D'après le n° 144, e^z est donc une fonction continue de z dans tout le plan.

148. Dérivée. — D'après le n° 145, la dérivée de e^z par rapport à z s'obtient en dérivant terme à terme la série (2); on trouve ainsi une série identique, c'est-à-dire que

$$(e^z)'_z = e^z.$$

On reconnaît de même, que

$$(e^{az})'_z = ae^{az},$$

a étant une constante réelle ou imaginaire.

149. Multiplication. — On sait, si u et v sont réels, que $e^{u+v}=e^u e^v$; cette formule subsiste pour u et v imaginaires. En effet, les deux séries qui définissent e^u et e^v, à savoir

$$1+\frac{u}{1}+\frac{u^2}{1.2}+\ldots,$$

$$1+\frac{v}{1}+\frac{v^2}{1.2}+\ldots,$$

étant absolument convergentes, leur produit s'obtiendra (n° 133) en ajoutant, dans un ordre quelconque, les produits d'un terme de l'une par un terme de l'autre. Groupons ensemble les termes d'ordre n en u et v dans le produit; ces termes sont

$$\frac{u^n}{n!}+\frac{u^{n-1}v}{(n-1)!}+\frac{u^{n-2}v^2}{(n-2)!\,2!}+\ldots+\frac{v^n}{n!},$$

ce qui s'écrit

$$\frac{1}{n!}\left[u^n + nu^{n-1}v + \frac{n(n-1)}{1.2}u^{n-2}v^2 + \ldots + v^n\right]$$

ou encore

$$\frac{(u+v)^n}{n!}.$$

On a donc

$$(3)\quad e^u e^v = 1 + \frac{u+v}{1} + \frac{(u+v)^2}{1.2} + \ldots + \frac{(u+v)^n}{n!} + \ldots = e^{u+v}. \quad \text{C. Q. F. D.}$$

Corollaires. — 1° La proposition s'étend d'elle-même à un nombre quelconque de facteurs exponentiels; par exemple

$$e^u e^v e^w = e^u e^{v+w} = e^{u+v+w}.$$

2° La fonction e^{-u} est l'inverse de e^u, car

$$e^u e^{-u} = e^{u-u} = e^0 = 1.$$

3° Si m est entier et positif, la puissance $m^{\text{ième}}$ de e^u est le produit de m facteurs, égaux à e^u; donc

$$(e^u)^m = e^{mu};$$

et la même formule subsiste, en vertu de 2°, si m est entier et négatif, car $(e^u)^{-m}$ est, par définition, l'inverse de $(e^u)^m$.

Si m n'est pas entier, la formule doit être complétée; on y reviendra plus loin (n° 160).

150. Fonctions circulaires. — Ces fonctions, $\cos z$ et $\sin z$, se définissent, pour z imaginaire, par les séries de puissances connues lorsque z est réel :

$$(4)\quad \sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \ldots,$$

$$(5)\quad \cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \ldots,$$

séries qui sont convergentes dans tout le plan (n° 147). Ce sont donc deux fonctions continues pour toutes les valeurs de z, et qui coïncident, lorsque z est réel, avec les fonctions trigonométriques classiques; on a en particulier

$$\cos 2\pi = 1 \quad \text{et} \quad \sin 2\pi = 0.$$

On a d'ailleurs

$$e^{iz} = 1 + \frac{iz}{1} - \frac{z^2}{2!} - i\frac{z^3}{3!} + \frac{z^4}{4!} + i\frac{z^5}{5!} - \ldots,$$

et, en changeant l'ordre des termes, ce qui est permis, puisque la série des modules converge quel que soit z (nº **147**),

$$e^{iz} = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} + \ldots + i\left(\frac{z}{1} - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \ldots\right),$$

c'est-à-dire

$$e^{iz} = \cos z + i \sin z,$$

pour toutes les valeurs, réelles ou imaginaires, de z.

On en déduit, en changeant z en $-z$ (¹),

$$e^{-iz} = \cos z - i \sin z;$$

d'où

(6) $$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \qquad \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i},$$

formules célèbres découvertes par Euler. En les dérivant on trouve

$$(\cos z)' = -\sin z, \qquad (\sin z)' = \cos z;$$

et, en les élevant au carré et ajoutant,

$$\cos^2 z + \sin^2 z = 1.$$

Les formules d'addition,

$$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a,$$
$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b,$$

s'étendent aussi au cas de a et b imaginaires : il suffit de remplacer dans ces formules les sin et les cos par leurs valeurs (6) en exponentielles ; on obtient des identités.

151. Périodicité. — La fonction e^z admet la *période* $2\pi i$, c'est-à-dire ne change pas quand on augmente z de $2\pi i$. En effet

$$e^{z+2\pi i} = e^z e^{2\pi i} = e^z(\cos 2\pi + i \sin 2\pi) = e^z.$$

(¹) En effet, en vertu des définitions (4) et (5), la fonction $\cos z$ est *paire* et la fonction $\sin z$ *impaire*, c'est-à-dire que $\cos z$ ne change pas et que $\sin z$ change de signe, quand on change z en $-z$.

Les fonctions $\sin z$ et $\cos z$ admettent la période 2π, car e^{iz} et e^{-iz}, qui figurent seuls dans les formules (6), admettent cette période.

De même, en changeant z en $z + \pi i$, on a

$$e^{z+\pi i} = e^z(\cos\pi + i\sin\pi) = -e^z;$$

et, en changeant z en $z + \pi$ dans (6),

$$\cos(z+\pi) = -\cos z, \qquad \sin(z+\pi) = -\sin z;$$

formules dont on déduit, en remplaçant z par $-z$, et observant que $\cos(-z) = \cos z$; $\sin(-z) = -\sin z$,

$$\cos(\pi - z) = -\cos z, \qquad \sin(\pi - z) = \sin z;$$

comme dans le cas où z est réel.

152. Fonction $\tang z$. — On définit cette fonction par la relation

$$\tang z = \frac{\sin z}{\cos z}.$$

C'est une fonction qui n'est pas développable en une série de puissances convergentes dans *tout* le plan, puisqu'elle devient infinie pour les valeurs qui annulent $\cos z$, et qui sont comprises, comme on le verra au n° **158**, dans la formule $z = \frac{\pi}{2} + k\pi$.

153. Applications. — 1° *Formule de Moivre.* — En élevant à la puissance entière et positive, m, les deux membres de la formule

$$e^{iz} = \cos z + i\sin z,$$

il vient

$$e^{miz} = (\cos z + i\sin z)^m.$$

D'ailleurs e^{miz}, en vertu de la même formule, est égal à

$$\cos mz + i\sin mz;$$

de là la formule dite *de Moivre*,

$$(\cos z + i\sin z)^m = \cos mz + i\sin mz,$$

bien connue dans les éléments lorsque z est réel, et qui donne,

après développement de la puissance du binome et séparation du réel et de l'imaginaire, les expressions classiques de $\cos mz$ et $\sin mz$:

$$\cos mz = \cos^m z - \frac{1}{2!} m(m-1) \cos^{m-2} z \sin^2 z$$
$$+ \frac{1}{4!} m(m-1)(m-2)(m-3) \cos^{m-4} z \sin^4 z - \ldots,$$

$$\sin mz = \frac{m}{1!} \cos^{m-1} z \sin z - \frac{1}{3!} m(m-1)(m-2) \cos^{m-3} z \sin^3 z + \ldots.$$

2° *Réciproque.* — Proposons-nous d'évaluer, réciproquement, $\sin^m z$ et $\cos^m z$ en fonction des sinus et des cosinus des multiples entiers de z. On a, en partant de (6),

$$(7) \quad 2^m \cos^m z = (e^{iz} + e^{-iz})^m = e^{miz} + m e^{(m-2)iz} + \ldots + m e^{-(m-2)iz} + e^{-miz},$$

et, en réunissant les termes équidistants des extrêmes,

$$(8) \qquad 2^m \cos^m z = 2 \cos mz + 2m \cos(m-2)z + \ldots.$$

Si m est impair, le second membre de (7) a un nombre pair de termes qui s'associent deux à deux; si m est pair, il y a un terme médian, indépendant de z, qui terminera le développement (8), et qui a pour valeur

$$\frac{m!}{\left(\frac{m}{2}!\right)^2}.$$

On trouve de même, si m est impair,

$$(2i)^m \sin^m z = 2i \sin mz - 2im \sin(m-2)z + \ldots;$$

et, si m est pair,

$$(2i)^m \sin^m z = 2 \cos mz - 2m \cos(m-2)z + \ldots + (-1)^{\frac{m}{2}} \frac{m!}{\left(\frac{m}{2}!\right)^2}.$$

CHAPITRE VI.

FONCTIONS D'UNE VARIABLE IMAGINAIRE.

I. — GÉNÉRALITÉS.

154. On vient de rencontrer, avec les séries de puissances, un premier exemple de fonction d'une variable imaginaire; il importe d'étendre ce résultat en définissant, d'une manière générale, ce que l'on doit entendre par fonction de $x+yi$; on verra, principalement dans le Cours de seconde année, que la plupart des progrès de l'Analyse au XIX[e] siècle reposent sur cette extension.

Soit donc $z = x + yi$ une variable imaginaire; toutė fonction $P + Qi$, où P et Q sont des fonctions réelles de x, y, est, au sens strict du mot, une *fonction* de z, puisque si l'on se donne z, c'est-à-dire x et y, les fonctions P et Q sont déterminées. Mais c'est là une notion trop générale, dont le développement reviendrait évidemment à la théorie des fonctions de deux variables réelles x et y; le symbole imaginaire i ne jouerait qu'un rôle factice et compliquerait sans profit les raisonnements : si donc on veut étendre la théorie des fonctions d'une variable réelle, il sera nécessaire de particulariser les fonctions P et Q, en cherchant, si c'est possible, à donner à l'expression $P + Qi$ quelqu'une des propriétés dont jouissent les fonctions réelles d'une seule variable, et voici, à ce point de vue, la conception de Cauchy.

155. Définition de Cauchy. — Dans l'expression

$$P(x, y) + iQ(x, y),$$

où P et Q sont des fonctions réelles de x, y, donnons à ces variables des accroissements dx et dy; soient dP et dQ les différentielles totales correspondantes de P et Q; l'accroissement de $P + iQ$ a pour valeur principale $dP + i\,dQ$, et le rapport de

cette quantité à l'accroissement de la variable z, ou $x+iy$, est

$$(1)\qquad \frac{dP+i\,dQ}{dx+i\,dy}=\frac{\left(\frac{\partial P}{\partial x}+i\frac{\partial Q}{\partial x}\right)dx+\left(\frac{\partial P}{\partial y}+i\frac{\partial Q}{\partial y}\right)dy}{dx+i\,dy}.$$

Il dépend non seulement de x et y (c'est-à-dire de z) mais encore du quotient $\frac{dy}{dx}$, de sorte que le rapport de l'accroissement de la fonction à l'accroissement de la variable ne tend pas vers une limite déterminée dépendant de cette variable seule : en d'autres termes, $P+Qi$ n'a pas de dérivée, *en général*, par rapport à $x+yi$.

Cauchy *particularise* les fonctions P et Q de manière que la dérivée existe, c'est-à-dire que le rapport (1) soit indépendant de $\frac{dy}{dx}$; la condition d'indépendance est que les coefficients de dx et dy, au numérateur et au dénominateur du second membre, soient proportionnels, ce qui donne

$$\frac{\frac{\partial P}{\partial x}+i\frac{\partial Q}{\partial x}}{1}=\frac{\frac{\partial P}{\partial y}+i\frac{\partial Q}{\partial y}}{i},$$

condition qui se dédouble, en séparant le réel de l'imaginaire :

$$(2)\qquad \frac{\partial P}{\partial x}=\frac{\partial Q}{\partial y},\qquad \frac{\partial P}{\partial y}=-\frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Si ces deux relations fondamentales sont vérifiées pour tous les points x, y situés dans une région R du plan, la fonction $P+Qi$ aura, dans R, une dérivée par rapport à $z=x+yi$; la valeur de cette dérivée s'obtient en faisant $dy=0$, par exemple, dans (1), d'où

$$(3)\qquad (P+iQ)'_z=\frac{\partial P}{\partial x}+i\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}(P+iQ).$$

Une fonction de $x+yi$, dans le sens de Cauchy, se nomme *fonction analytique*.

Remarque. — Deux fonctions analytiques de z qui ont même dérivée ne diffèrent que d'une constante. Car, si $P+Qi$ et $R+Si$ sont ces deux fonctions, on a, par hypothèse, en vertu de (3),

$$\frac{\partial P}{\partial x}=\frac{\partial R}{\partial x},\qquad \frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial S}{\partial x},$$

et, en tenant compte de (2),

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial R}{\partial y}, \qquad \frac{\partial Q}{\partial y} = \frac{\partial S}{\partial y},$$

ce qui montre immédiatement que les différences $P - R$ et $Q - S$ sont indépendantes de x et y, c'est-à-dire sont des constantes absolues.

156. Ainsi, d'après cela, $P + Qi$ n'est une fonction de z que si les relations (2) sont vérifiées; il en résulte qu'on ne peut choisir arbitrairement ni P, ni Q, car en dérivant les identités (2) par rapport à y et x on a

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x\,\partial y} = \frac{\partial^2 Q}{\partial y^2}, \qquad \frac{\partial^2 P}{\partial x\,\partial y} = -\frac{\partial^2 Q}{\partial x^2};$$

d'où

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 Q}{\partial y^2} = 0,$$

et de même

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} = 0.$$

Les fonctions P (ou Q) de deux variables indépendantes x et y, qui vérifient cette relation différentielle, sont dites *fonctions harmoniques*.

157. Exemples de fonctions analytiques. — Nous avons, au nº 139, introduit la fonction z^n, ou $(x + iy)^n$, pour n entier et positif, en posant

$$z^n = \left[x^n - \frac{n(n-1)}{1.2}x^{n-2}y^2 + \ldots\right] + i\left[n\,x^{n-1}y - \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}x^{n-3}y^3 + \ldots\right].$$

La fonction ainsi définie est une fonction analytique de z, car on vérifie immédiatement que P et Q (c'est-à-dire les deux fonctions entre crochets) satisfont aux relations fondamentales (2).

On aurait pu encore le voir autrement en observant que la fonction $(x + iy)^n$ a une dérivée par rapport à z, c'est-à-dire que le rapport

$$\frac{(x + iy + dx + i\,dy)^n - (x + iy)^n}{dx + i\,dy}$$

tend vers une limite indépendante de $\frac{dy}{dx}$, à savoir

$$n(x+iy)^{n-1} = n\,z^{n-1}.$$

De même $\frac{1}{z}, \dots, \frac{1}{z^n}$ (n entier) sont des fonctions analytiques de z [1], et aussi plus généralement la *fonction de fonction* $f[\varphi(z)]$, en désignant par $f(z)$ et $\varphi(z)$ des fonctions analytiques de z : car on vérifie, comme dans le cas des variables réelles [2], que $f[\varphi(x+iy)]$ a une dérivée indépendante de $\frac{dy}{dx}$, à savoir $f'_\varphi \varphi'_z$.

La définition de z^n implique celle d'un polynome entier en z et celle d'une série de puissances; ces séries, et en particulier les fonctions e^z, $\sin z$, $\cos z$, sont donc des fonctions de z dans le sens de Cauchy.

158. Fonction logarithmique. — On reconnaît de même que la fonction *inverse* d'une fonction analytique, $f(z)$, est aussi une fonction analytique, c'est-à-dire que, si l'on pose

$$z = f(u),$$

u est fonction analytique de z. En effet, le rapport $\frac{\Delta f}{\Delta u}$ tend,

---

(1) La fonction $\frac{1}{z^n} = \frac{1}{(x+iy)^n}$ est définie par $\frac{1}{z^n} = \frac{(x-iy)^n}{(x^2+y^2)^n}$.

(2) En effet, posons

$$\varphi(z) = u, \qquad f[\varphi(z)] = v,$$

d'où

$$v = f(u);$$

augmentons z de dz. On a, puisque u a une dérivée,

$$\Delta u = dz[\varphi'(z) + \varepsilon];$$

et, puisque $f(u)$ a une dérivée,

$$\Delta v = \Delta u[f'(u) + \varepsilon'],$$

d'où, en éliminant Δu,

$$\frac{\Delta v}{dz} = [f'(u) + \varepsilon'][\varphi'(z) + \varepsilon],$$

et, à la limite,

$$\lim \frac{\Delta v}{dz} = f'(u)\varphi'(z). \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

puisque f est fonction analytique de u, vers la limite déterminée $f'(u)$, et par suite le rapport inverse, $\frac{\Delta u}{\Delta z}$, tend vers $\frac{1}{f'(u)}$, c'est-à-dire que u admet, par rapport à z, une dérivée parfaitement déterminée.

Par définition, on appelle *logarithme de* z la fonction inverse de e^z, c'est-à-dire liée à z par la relation

$$z = e^{\log z}.$$

Pour mettre $\log z$ sous la forme $P + Qi$, posons

$$z = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi);$$

ρ est le module, et φ l'argument de z, ou plutôt un quelconque de ses arguments, car ceux-ci diffèrent entre eux de 2π. On a ainsi

$$\rho(\cos\varphi + i\sin\varphi) = e^{P+Qi} = e^P(\cos Q + i\sin Q),$$

d'où, en égalant les parties réelles et les parties imaginaires,

$$(4) \qquad \begin{cases} \rho\cos\varphi = e^P\cos Q, \\ \rho\sin\varphi = e^P\sin Q. \end{cases}$$

On en déduit

$$\rho^2 = e^{2P} \qquad \text{d'où} \qquad \rho = e^P,$$

car ρ est essentiellement positif. Cela donne la valeur de P :

$$P = \log\rho,$$

$\log\rho$ désignant le logarithme arithmétique (népérien) de ρ.

Les équations (4) deviennent alors

$$\cos\varphi = \cos Q, \qquad \sin\varphi = \sin Q,$$

d'où

$$Q = \varphi + 2k\pi \qquad (k \text{ entier}).$$

Donc, enfin,

$$(5) \qquad \log z = P + Qi = \log\rho + i(\varphi + 2k\pi).$$

Le logarithme a donc une infinité de valeurs distinctes, qui diffèrent entre elles de $2\pi i$. Si z est réel et positif, un de ses arguments, φ, est nul, et, en prenant $k = 0$, on voit que le logarithme a *une* valeur réelle, c'est le logarithme arithmétique; si z est négatif ou imaginaire, toutes les valeurs de son logarithme sont imaginaires.

Corollaires. — 1° Cherchons les valeurs de z qui annulent $\sin z$ et $\cos z$ et qu'on nomme les *zéros* de ces fonctions.

Écrivons d'abord que $\sin z$ est nul ; il vient

$$e^{iz} - e^{-iz} = 0, \quad \text{ou} \quad e^{2iz} = 1,$$

c'est-à dire

$$2iz = \log 1 = 2k\pi i \quad [\text{d'après (5)}],$$

d'où

$$z = k\pi,$$

formule qui montre que $\sin z$ ne s'annule que pour les valeurs réelles qu'on sait annuler $\sin x$.

Exprimons que $\cos z$ est nul :

$$e^{iz} + e^{-iz} = 0, \quad \text{ou} \quad e^{2iz} = -1,$$

c'est-à-dire

$$2iz = \log(-1).$$

Comme $-1 = \cos\pi + i\sin\pi$, le module de -1 est $+1$, et un de ses arguments, φ, est π ; donc, d'après (5),

$$\log(-1) = i(\pi + 2k\pi),$$

et, finalement,

$$2iz = i(\pi + 2k\pi),$$

d'où

$$z = \frac{\pi}{2} + k\pi,$$

formule qui donne lieu à la même remarque que la précédente.

2° Cherchons de même les *zéros* de la fonction exponentielle, e^z. La relation

$$e^z = 0$$

montre que z est le logarithme de zéro, et réciproquement ; le logarithme *arithmétique* de zéro étant $-\infty$, et l'argument φ de zéro étant indéterminé, on a, pour les zéros de e^z, la formule

$$z = -\infty + i\varphi.$$

159. On démontre sans difficulté que $\log z$ jouit des mêmes propriétés que les logarithmes réels. Ainsi, si l'on a

$$z = e^{\log z},$$

$$z' = e^{\log z'},$$

on aura (n° 149)

$$zz' = e^{\log z + \log z'},$$

d'où

$$\log(zz') = \log z + \log z' + 2k\pi i.$$

La dérivée de $\log z$ sera $\frac{1}{z}$; il suffit, pour le voir, de dériver par rapport à z la relation de définition $z = e^{\log z}$, ce qui donne, en appliquant la règle de dérivation d'une fonction de fonction (n° 157),

$$1 = e^{\log z}(\log z)'_z,$$

d'où

$$(\log z)'_z = e^{-\log z} = \frac{1}{z}.$$

Comme corollaire, on voit, en appliquant la même règle, que la dérivée de $\log f(z)$, $f(z)$ étant une fonction analytique, est $\frac{f'(z)}{f(z)}$.

160. Fonction z^n. — On définira z^n, pour n quelconque (réel ou imaginaire) par la relation

$$(6) \qquad z^n = e^{n \log z},$$

qui a lieu, d'après le corollaire 3° du n° 149, lorsque n est entier, puisque $z = e^{\log z}$.

Soit toujours

$$z = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi);$$

il vient dans (6), en remplaçant $\log z$ par sa valeur (5),

$$(7) \qquad z^n = e^{n(\log\rho + i\varphi + 2k\pi i)}.$$

Si n est réel, on peut écrire

$$(8) \qquad z^n = e^{n\log\rho + ni(\varphi + 2k\pi)} = \rho^n e^{ni(\varphi + 2k\pi)},$$

ρ^n désignant la valeur positive de la puissance $n^{\text{ième}}$ du module.

D'après cela, z^n a des valeurs différentes qu'on obtient en multipliant l'une d'elles par $e^{2kn\pi i}$. Si n est réel et entier, $e^{2kn\pi i}$ est égal à l'unité, quel que soit l'entier k, et z^n n'a qu'une valeur; si n est une fraction irréductible, $n = \frac{p}{q}$, z^n aura q valeurs distinctes, obtenues en donnant à k, dans (8), les valeurs $0, 1, \ldots, (q-1)$; si n n'est ni entier ni fractionnaire, z^n aura une infinité

de valeurs. Par exemple, $z^{\frac{1}{2}}$, ou $\sqrt{z}$, a deux valeurs, égales et de signes contraires.

On a, en vertu de la formule (6) de définition, quels que soient n et n',

$$z^n z^{n'} = e^{n \log z + n' \log z},$$

et, en supposant qu'on prenne la *même valeur* pour les deux fonctions $\log z$ du second membre,

$$z^n z^{n'} = e^{\log z (n+n')} = z^{n+n'},$$

c'est-à-dire que le produit d'une des valeurs de z^n par une valeur *convenable* de $z^{n'}$ est *une* des valeurs de $z^{n+n'}$.

Nous pouvons maintenant définir une puissance quelconque de l'exponentielle; on a en effet, par (6),

$$(e^u)^n = e^{n \log e^u}.$$

Or une des valeurs de $\log e^u$ étant évidemment u, ce logarithme a pour valeur générale $u + 2k\pi i$, de sorte que

$$(e^u)^n = e^{n(u+2k\pi i)} = e^{nu} e^{2kn\pi i}.$$

Si n est entier, le second membre est e^{nu}, comme cela devait être (n° **149**, corollaire 3°); si n n'est pas entier, le second membre a des valeurs en nombre limité ou illimité selon que n est fractionnaire ou incommensurable, et la formule

$$(e^u)^n = e^{nu},$$

sans être fausse, puisqu'elle correspond au choix de $k = 0$, ne donne qu'une des valeurs du premier membre. Sous cette réserve, on conclut de là les formules

$$(z^n)^{n'} = (e^{n \log z})^{n'} = e^{nn' \log z} = z^{nn'},$$

c'est-à-dire qu'*une* des valeurs de $(z^n)^{n'}$ est $z^{nn'}$. De même

$$(zu)^n = e^{n \log zu} = e^{n \log z} e^{n \log u} = z^n u^n.$$

c'est-à-dire qu'*une* des valeurs de $(zu)^n$ est le produit d'une valeur de z^n par une valeur de u^n.

Enfin la *dérivée* de z^n est nz^{n-1} : on le voit en dérivant par rapport à z les deux membres de la relation de définition (6), ce

qui donne

$$(z^n)' = e^{n \log z} \frac{n}{z} = \frac{n}{z} z^n,$$

z^n ayant, dans les deux membres, la même détermination.

161. Développements de $\log(1+z)$ et de $(1+z)^m$. — Il est aisé d'obtenir les développements de ces deux fonctions en séries de puissances.

1° On a identiquement

$$\frac{1}{1+z} = 1 - z + z^2 - z^3 + \ldots + (-1)^n \frac{z^n}{1+z}.$$

D'ailleurs la série de puissances $1 - z + z^2 - z^3 + \ldots$ a évidemment pour rayon de convergence l'unité, et, si $\operatorname{mod} z$ est inférieur à 1, le terme résiduel $\frac{z^n}{1+z}$ tend vers zéro pour n infini. Par suite, la série indéfinie

$$(9) \qquad 1 - z + z^2 - z^3 + \ldots$$

représente $\frac{1}{1+z}$, pour toutes les valeurs de z dont l'affixe est à l'intérieur du cercle de rayon 1, décrit de l'origine comme centre.

Cela posé, $\log(1+z)$ est une fonction analytique de z, dont la dérivée est $\frac{1}{1+z}$, d'après le n° 159; si donc $\log(1+z)$ est développable en série de puissances, les termes de son développement auront respectivement pour dérivées les termes de (9), en vertu du n° 145, et ce développement sera dès lors, à une constante près,

$$(10) \qquad z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \frac{z^4}{4} + \ldots.$$

D'ailleurs la série (10) admet le cercle de rayon un pour cercle de convergence (n° 141); c'est donc une fonction déterminée et continue de z à l'intérieur de ce cercle, et sa dérivée est la série (9), c'est-à-dire

$$\frac{1}{1+z}.$$

Dès lors la série (10) et la fonction $\log(1+z)$, ayant même dérivée pour toutes les valeurs de z dont le module est inférieur à 1, ne diffèrent que d'une constante (n° 155, Remarque). Si l'on

choisit pour $\log(1+z)$ la valeur qui s'annule pour $z=0$, la constante est nulle, puisque la série (10) s'annule aussi à l'origine; on a donc

$$\log(1+z) = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \frac{z^4}{4} + \ldots,$$

développement valable à l'intérieur du cercle de rayon 1 décrit de l'origine comme centre.

2° Pour $(1+z)^m$, démontrons que le développement classique du binome est encore valable quels que soient z et m, pourvu que $\operatorname{mod} z$ soit inférieur à l'unité. Posons à cet effet

$$f(z) = 1 + \frac{m}{1} z + \frac{m(m-1)}{1.2} z^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3} z^3 + \ldots.$$

Dans cette série, le rapport d'un terme au précédent est

$$\frac{m-n}{n+1} z,$$

quantité dont le module finit par rester inférieur à 1, à partir d'une valeur assez grande de n, si $\operatorname{mod} z < 1$; la série des modules converge donc (n° 130), c'est-à-dire que la série elle-même est absolument convergente, pour $\operatorname{mod} z < 1$; on voit de même que la série des modules diverge si $\operatorname{mod} z > 1$: le rayon de convergence de la série de puissances proposée est donc égal à 1.

On en déduit, en appliquant la règle de dérivation,

$$\frac{1}{m} f'(z) = 1 + \frac{m-1}{1} z + \frac{(m-1)(m-2)}{1.2} z^2 + \ldots;$$

d'où, en multipliant les deux membres par $1+z$,

$$\begin{aligned} \frac{1+z}{m} f'(z) = 1 &+ \frac{m-1}{1} z + \frac{(m-1)(m-2)}{1.2} z^2 + \ldots \\ &+ z + \frac{m-1}{1} z^2 + \frac{(m-1)(m-2)}{1.2} z^3 + \ldots. \end{aligned}$$

Le second membre est la somme de deux séries convergentes qu'on a le droit de réunir terme à terme (n° 129, 6°); donc

$$\frac{1+z}{m} f'(z) = 1 + \frac{m}{1} z + \frac{m(m-1)}{1.2} z^2 + \ldots,$$

et l'on retrouve évidemment au second membre la série $f(z)$.

Donc

$$\frac{1+z}{m} f'(z) = f(z),$$

c'est-à-dire

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{m}{1+z}.$$

Le premier membre est la dérivée de $\log f(z)$, le second est celle de $m \log(1+z)$; on a donc (n° 155, Remarque)

$$\log f(z) = m \log(1+z) + \text{const.}$$

Pour $z = 0$, $f(z)$ et $\log(1+z)$ se réduisent à l'unité, et dès lors la constante est nulle; on en conclut

$$f(z) = e^{m \log(1+z)},$$

la valeur à prendre pour $\log(1+z)$ étant celle qui s'annule avec z: et par suite

$$f(z) = (1+z)^m,$$

la détermination à choisir pour $(1+z)^m$ étant celle qui est égale à 1 lorsque z est nul. On a donc, sous le bénéfice de cette observation,

$$(1+z)^m = 1 + \frac{m}{1} z + \frac{m(m-1)}{1.2} z^2 + \ldots,$$

développement valable quel que soit m, et pour toutes les valeurs de z dont le module est inférieur à l'unité.

II. — FONCTIONS MONODROMES.

162. La formule (5) du n° 158

$$\log z = \log \rho + i\varphi,$$

où φ est un quelconque des arguments de z, permet de suivre les variations de la fonction $\log z$, lorsque la variable z varie d'une manière continue quelconque.

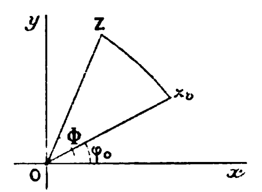
Soit z_0 (*fig.* 44) un point du plan; φ_0 un de ses arguments; imaginons que la variable z parte de z_0, avec la valeur φ_0 de l'argument, et décrive une ligne $z_0 Z$: la fonction $\log z$ part de z_0 avec

la valeur bien déterminée

$$(\mathrm{L}) \qquad \log \operatorname{mod} z_0 + i\varphi_0;$$

quand z suit la ligne $z_0 Z$, son argument varie d'une manière con-

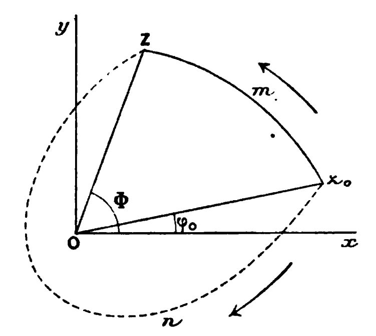
Fig. 44.



tinue et acquiert en Z une valeur finale Φ, parfaitement déterminée; $\log z$ varie également d'une manière continue, en partant de la valeur (L), et acquiert en Z la valeur $\log P + i\Phi$ (P désignant mod Z), qui est parfaitement déterminée.

Or ici se présente ce fait, d'une importance fondamentale, que si z suit deux chemins différents pour aller de z_0 en Z (*fig.* 45),

Fig. 45.



les valeurs finales de $\log z$ au point Z ne sont pas nécessairement les mêmes, bien que les valeurs initiales, en z_0, le soient.

Considérons, en effet, les deux chemins $z_0 m Z$ (plein) et $z_0 n Z$ (ponctué). Quand la variable suit le premier, l'argument de z varie de φ_0 à Φ; de sorte que l'on arrive en Z avec la valeur finale :

$$\log Z = \log P + i\Phi.$$

Quand la variable suit le second chemin $z_0 n Z$, l'argument

de z, varie de φ_0 à $-(2\pi - \Phi)$, et l'on a pour la valeur finale :

$$\log Z = \log P + i(\Phi - 2\pi).$$

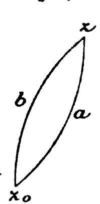
Ces deux valeurs de $\log Z$ ne sont pas les mêmes; elles diffèrent de $2\pi i$.

Il y a ainsi des fonctions de z qui prennent en un point du plan des valeurs différentes selon le chemin suivi par la variable; c'est ce qui explique l'utilité de la définition suivante.

163. Définition. — On dit qu'une fonction $f(z)$ est *monodrome* (ou *uniforme*) dans une région R du plan, lorsque le point z, de coordonnées x, y, étant assujetti à rester dans cette région, la fonction prend en chaque point une valeur unique. indépendante du chemin suivi par le point z.

En particulier, si z décrit une courbe fermée, la fonction monodrome $u = f(z)$, revient au point de départ avec sa valeur initiale. *Réciproquement,* si elle jouit de cette propriété pour toutes les courbes fermées tracées dans R, elle est monodrome dans cette région; qu'on décrive, en effet, le chemin $z_0 a z$ (*fig.* 46)

Fig. 46.



en partant de z_0 avec la valeur u_0 de la fonction, on arrive en z avec une valeur u; et si l'on décrit ensuite le chemin $z b z_0$, on arrive en z_0, par hypothèse, avec la valeur u_0. Si maintenant on rétrograde de z_0 en z suivant $z_0 b z$, la fonction repasse en chaque point par la même valeur que tout à l'heure et, par suite, acquiert en z la valeur u. En d'autres termes, les deux chemins $z_0 a z$ et $z_0 b z$, décrits avec la valeur initiale u_0, conduisent en z à la même valeur u de la fonction. C. Q. F. D.

164. Exemples. — Donnons maintenant quelques exemples.

1° Les polynomes entiers en z, les fractions rationnelles (quo-

tients de deux polynomes entiers), les fonctions e^z, $\sin z$, $\cos z$, $\tang z$, sont monodromes dans tout le plan; en effet, elles n'ont en un point du plan qu'une seule valeur, et c'est toujours à cette valeur que l'on arrivera, quel que soit le chemin suivi par le point z.

2° La fonction $\sqrt{z}$ n'est pas monodrome dans toute région comprenant le point $z = 0$, c'est-à-dire l'origine. En effet, si l'on pose

$$z = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi) = \rho e^{i\varphi},$$

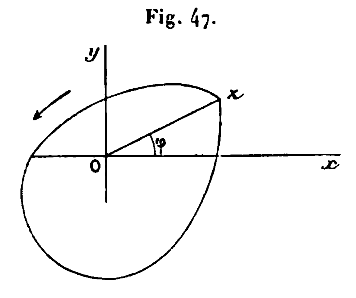
on aura [n° 160, équation (8)], pour la valeur de $z^{\frac{1}{2}}$, ou $\sqrt{z}$,

$$\sqrt{z} = \rho^{\frac{1}{2}} e^{\frac{i\varphi}{2}},$$

φ étant un des arguments, $\varphi_0 + 2k\pi$, de z.

Si le point z (*fig.* 47) décrit, dans le sens positif, un contour

Fig. 47.



fermé entourant l'origine, l'argument φ, de z, varie d'une manière continue et augmente de 2π; par suite, $\sqrt{z}$ varie d'une manière continue et revient au point de départ avec la valeur

$$\rho^{\frac{1}{2}} e^{i\frac{\varphi+2\pi}{2}} = \rho^{\frac{1}{2}} e^{\frac{i\varphi}{2}} e^{i\pi} = \rho^{\frac{1}{2}} e^{\frac{i\varphi}{2}}(\cos\pi + i\sin\pi) = -\rho^{\frac{1}{2}} e^{i\frac{\varphi}{2}}.$$

En d'autres termes, $\sqrt{z}$ change de signe quand z décrit un contour fermé contenant l'origine; $\sqrt{z}$ reprendrait la même valeur au point de départ si z décrivait deux fois le contour.

3° Plus généralement, la fonction $(z - a)^m$, où m n'est pas entier, n'est pas monodrome dans toute région comprenant le point $z = a$. Car si l'on pose

$$z - a = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi) = \rho e^{i\varphi},$$

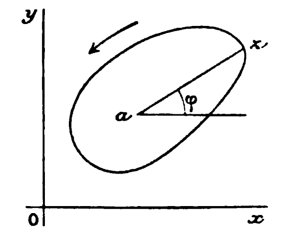
on aura (n° **160**), en supposant m réel,

$$(z-a)^m = \rho^m e^{mi\varphi},$$

φ désignant un des arguments, $\varphi_0 + 2k\pi$, de $z-a$, et ρ^m la valeur positive de la puissance $m^{\text{ième}}$ du module.

Si z (*fig.* 48) décrit, dans le sens positif, un contour fermé

Fig. 48.



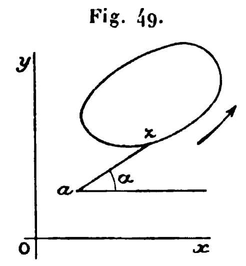
entourant le point a, l'argument φ de $z-a$ augmente de 2π, et $(z-a)^m$, qui a varié d'une manière continue, revient au point de départ avec la valeur

$$\rho^m e^{mi(\varphi+2\pi)} = (\rho^m e^{mi\varphi})\, e^{2m\pi i}.$$

La fonction $(z-a)^m$ se reproduit donc multipliée par $e^{2m\pi i}$, quantité différente de 1, puisque m n'est pas entier.

Au contraire, $(z-a)^m$ (*fig.* 49) est monodrome à l'intérieur

Fig. 49.

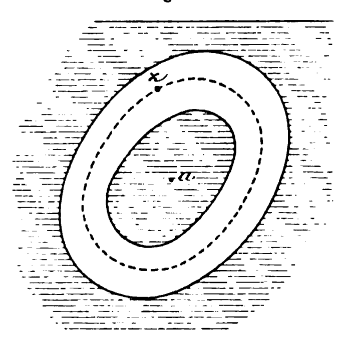


d'une région limitée par une *courbe fermée* ne contenant pas le point a, car si z décrit cette courbe, ou une courbe intérieure, l'argument de $z-a$ reprend sa valeur initiale quand on revient au point de départ.

Mais il est essentiel d'ajouter que la courbe fermée qui limite la région doit être *à contour simple,* c'est-à-dire doit pouvoir être décrite d'un seul trait; en effet, dans une région limitée par

deux courbes fermées entourant le point a (*fig.* 50, partie non ombrée), la fonction $(z-a)^m$ n'est pas monodrome, car, en restant dans cette région, le point z peut tourner autour du

Fig. 50.

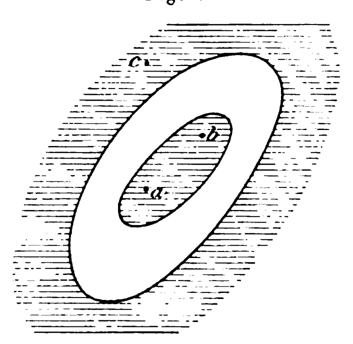


point a, de sorte qu'on revient au point de départ avec une valeur de $(z-a)^m$ différente de la valeur initiale.

Le point a est dit *critique* pour la fonction $(z-a)^m$, quand m n'est pas entier.

4° La fonction $\sqrt{(z-a)(z-b)(z-c)}$, produit des trois radicaux $\sqrt{z-a}$, $\sqrt{z-b}$, $\sqrt{z-c}$, n'est pas monodrome dans une région qui comprend un des points a, b, c; elle l'est à l'intérieur d'un contour simple ne contenant aucun de ces points. Elle est

Fig. 51.

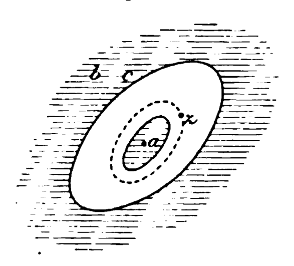


également monodrome dans la région (non ombrée) limitée par deux courbes fermées entourant chacune deux des points a, b, c (région à contour *complexe*) (*fig.* 51); car, en restant dans cette région, on ne peut tourner autour de a sans tourner en même

temps autour de b, de sorte que, lorsqu'on revient au point de départ, les deux radicaux $\sqrt{z-a}$ et $\sqrt{z-b}$ ont changé simultanément de signe ou n'ont pas changé. Le troisième radical $\sqrt{z-c}$ reprenant sa valeur initiale, puisque c est en dehors de la région considérée, la proposition est établie.

La fonction $\sqrt{(z-a)(z-b)(z-c)}$ n'est pas monodrome dans une région limitée par *deux* courbes fermées contenant chacune un (ou trois) des points a, b, c; car ce n'est pas une région à contour simple, et, sans en sortir, le point z (*fig.* 52) peut tourner

Fig. 52.



autour de a seul, de sorte que la fonction, quand on revient au point de départ, a changé de signe.

5° La fonction $\log z$ n'est pas monodrome dans toute région qui comprend le point $z = 0$ (origine); on a en effet, en posant $z = \rho e^{i\varphi}$,

$$\log z = \log \rho + i\varphi,$$

φ étant un des arguments de z.

Si donc z fait un tour dans le sens positif, autour de l'origine, φ augmente de 2π et $\log z$ augmente de $2\pi i$. Si z fait un tour autour de O dans le sens négatif, $\log z$ augmente de $-2\pi i$.

Au contraire, $\log z$ est monodrome à l'intérieur d'un contour simple ne comprenant pas l'origine.

Mêmes conclusions pour la fonction $\log(z-a)$ et le point $z = a$, qui est son *point critique*.

En résumé, les fonctions telles que $(z-a)^\alpha$, $(z-b)^\beta$, $(z-c)^\gamma$, $\log(z-a)$, ... sont monodromes dans toute région *à contour simple* qui ne comprend aucun point critique; sous une autre forme, on peut dire que deux chemins allant d'un point z_0 à un point Z conduisent à la même valeur finale de la fonction,

lorsqu'on peut déformer le premier *d'une manière continue et sans traverser de point critique*, de façon à le faire coïncider avec le second.

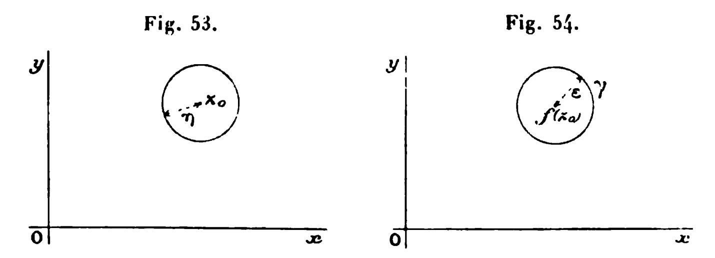
165. Continuité. — On dit que la fonction analytique $f(z)$ est continue pour $z = z_0$ lorsque, étant donné un nombre, ε, aussi petit qu'on veut, on peut assigner un nombre η tel que l'on ait

$$\text{mod}[f(z_0 + h) - f(z_0)] < \varepsilon$$

pour toutes les valeurs de h dont le module est $< \eta$. C'est la définition qu'on a déjà adoptée pour les séries de puissances. La fonction $f(z)$ est dite continue dans une région du plan si elle est continue pour tous les points de cette région. Les fonctions e^z, $\sin z$, $\cos z$, les polynomes entiers en z sont continus dans tout le plan, comme on l'a établi déjà. La fonction $\tang z$ n'est pas continue dans une région comprenant un des points $z = (2k+1)\frac{\pi}{2}$, où $\tang z$ devient infinie; elle est continue dans toute autre région. De même $\log z$ n'est continue que dans une région ne comprenant pas l'origine.

Géométriquement, la définition de la continuité s'interprète comme il suit.

Représentons la variable z, comme d'ordinaire, sur un plan par



le point dont les coordonnées sont la partie réelle et la partie imaginaire de z; représentons de même $f(z)$ sur un autre plan. Du point $f(z_0)$ comme centre, dans le second plan, décrivons un cercle γ, de rayon ε; il faut, pour la continuité de $f(z)$ au point z_0, qu'on puisse assigner η (*fig.* 53) tel que, si le point z reste dans le cercle de centre z_0 et de rayon η du premier plan, le point $f(z)$ du second plan reste dans le cercle γ (*fig.* 54).

166. Séries dont les termes sont des fonctions d'une variable imaginaire. — Soit la série

$$(S) \qquad u_1(z) + u_2(z) + \ldots + u_n(z) + \ldots;$$

on dit qu'elle est *uniformément convergente* dans une région R du plan si, étant donné ε, on peut assigner un nombre N, fonction de ε seul, tel qu'on ait

$$\bmod R_n(z) = \bmod[u_{n+1}(z) + u_{n+2}(z) + \ldots] < \varepsilon,$$

pour $n \geqq N$ et pour toutes les valeurs de z dont l'affixe est dans la région R (*voir* le n° **139**). On établit, comme dans la remarque du n° **140**, que :

Une série est uniformément convergente dans une région si, dans cette région, les modules de ses termes sont égaux ou inférieurs aux termes de même rang d'une série numérique convergente, à termes positifs.

Il est clair que la série est aussi *absolument convergente* dans le même cas.

167. Les séries uniformément convergentes dans une région, et dont les termes sont des fonctions monodromes et continues de z dans la même région, jouissent d'une propriété importante :

Leur somme est une fonction monodrome et continue dans la même région.

Elle est monodrome, car la série converge et chacun de ses termes n'a qu'une valeur pour une valeur de z; je dis qu'elle est continue; il suffit, pour le voir, de reproduire sans changement le raisonnement du n° **144**, en remplaçant le cercle de convergence par la région de convergence uniforme.

C'est surtout dans le Cours de seconde année que la théorie des fonctions analytiques sera développée; on se bornera ici à ces brèves indications.

CHAPITRE VII.

DÉVELOPPEMENTS EN SÉRIE.

I. — FORMULE DE TAYLOR DANS LE CAS DE PLUSIEURS VARIABLES.

168. Soit une fonction de deux variables $z = f(x, y)$; désignons par h et k deux constantes et considérons la fonction de t :

$$f(x + ht, y + kt) = \varphi(t).$$

Si l'on suppose x et y constants et t variable, on aura, par la formule de Maclaurin, en employant le reste de Lagrange,

$$\varphi(t) = \varphi(0) + t\varphi'(0) + \ldots + \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}\varphi^{n-1}(0) + \frac{t^n}{n!}\varphi^n(\theta t).$$

Calculons les dérivées successives $\varphi'(t)$, $\varphi''(t)$, ... En posant, pour simplifier,

$$x + ht = \alpha, \qquad y + kt = \beta,$$

on a

$$\varphi(t) = f(\alpha, \beta),$$

d'où

$$\varphi'(t) = \frac{\partial f}{\partial \alpha}\frac{d\alpha}{dt} + \frac{\partial f}{\partial \beta}\frac{d\beta}{dt} = h\frac{\partial f}{\partial \alpha} + k\frac{\partial f}{\partial \beta},$$

$$\begin{aligned}\varphi''(t) &= h\left(\frac{\partial^2 f}{\partial \alpha^2}h + \frac{\partial^2 f}{\partial \alpha\,\partial \beta}k\right) + k\left(\frac{\partial^2 f}{\partial \alpha\,\partial \beta}h + \frac{\partial^2 f}{\partial \beta^2}k\right)\\ &= h^2\frac{\partial^2 f}{\partial \alpha^2} + 2hk\frac{\partial^2 f}{\partial \alpha\,\partial \beta} + k^2\frac{\partial^2 f}{\partial \beta^2};\end{aligned}$$

et ainsi de suite jusqu'à $\varphi^n(t)$ inclus, où l'on remplacera t par θt. Mais, d'ailleurs, à cause des relations $\alpha = x + ht$, $\beta = y + kt$, les dérivées partielles de $f(\alpha, \beta)$, par rapport à α et β, sont les mêmes que les dérivées partielles de même ordre par rapport à x et y; de sorte que

$$\varphi'(t) = h\frac{\partial f}{\partial x} + k\frac{\partial f}{\partial y},$$

$$\varphi''(t) = h^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2hk\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} + k^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$\varphi^n(t) = h^n\frac{\partial^n f}{\partial x^n} + nh^{n-1}k\frac{\partial^n f}{\partial x^{n-1}\partial y} + \ldots + k^n\frac{\partial^n f}{\partial y^n},$$

les coefficients étant ceux du binome (n° **44**), et $\frac{\partial f}{\partial x} \cdots$ désignant $\frac{\partial}{\partial x} f(x+ht, y+kt)\ldots$. Faisons maintenant $t=0$ dans ces dérivées, pour avoir $\varphi'(0)$, $\varphi''(0)$, ...; les expressions $\frac{\partial f}{\partial x}$, ... désigneront alors $\frac{\partial}{\partial x} f(x, y)$, ..., et il viendra

$$\varphi(t) = f(x+ht, y+kt) = f(x,y) + t(hf'_x + kf'_y) \\ + \frac{t^2}{1.2}(h^2 f''_{x^2} + 2hkf''_{xy} + k^2 f''_{y^2}) + \ldots$$

Faisons enfin $t=1$; nous obtenons la formule cherchée :

$$f(x+h, y+k) \\ = f(x,y) + (hf'_x + kf'_y) + \frac{1}{2!}(h^2 f''_{x^2} + 2hkf''_{xy} + k^2 f''_{y^2}) + \ldots \\ + \frac{1}{(n-1)!}\left[h^{n-1}\frac{\partial^{n-1} f}{\partial x^{n-1}} + \frac{(n-1)}{1} h^{n-2} k \frac{\partial^{n-1} f}{\partial x^{n-2}\partial y} + \ldots\right] + R_n,$$

ce qu'on écrit symboliquement :

$$f(x+h, y+k) = f(x,y) + \left(h\frac{\partial f}{\partial x} + k\frac{\partial f}{\partial y}\right) + \frac{1}{1.2}\left(h\frac{\partial f}{\partial x} + k\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \ldots \\ + \frac{1}{1.2\ldots(n-1)}\left(h\frac{\partial f}{\partial x} + k\frac{\partial f}{\partial y}\right)^{n-1} + R_n,$$

en convenant, dans le développement des binomes, de remplacer la puissance $\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^p \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^q$ par $\frac{\partial^{p+q} f}{\partial x^p \partial y^q}$.

Quant au reste R_n, il a la même forme que le terme qui le précède; on remplacera simplement dans ce terme $n-1$ par n, et $f(x, y)$ par $f(x+\theta h, y+\theta k)$.

On montre aisément que la formule s'applique si $f(x, y)$ et ses dérivées partielles jusqu'à l'ordre n inclusivement sont continues et déterminées, lorsque x et y varient de x à $x+h$ et de y à $y+k$.

L'extension de cette formule à un nombre quelconque de variables est immédiate.

169. Remarque. — Si l'on pose $f(x,y) = z$; $h = dx$, $k = dy$, on voit que, dans la formule précédente, les termes successifs

$$dx\, f'_x + dy\, f'_y, \qquad dx^2 f''_{x^2} + 2\,dx\,dy\, f''_{xy} + dy^2 f''_{y^2}, \;\ldots$$

sont égaux à dz, d^2z, ... (n° **44**). Donc on peut écrire, en re-

marquant que $f(x+dx, y+dy) - f(x, y)$ n'est autre chose que l'accroissement Δz, de z,

$$\Delta z = dz + \frac{1}{2!}d^2 z + \ldots + \frac{1}{(n-1)!}d^{n-1}z + R_n,$$

formule importante qui est également vraie pour une fonction d'un nombre quelconque de variables et, en particulier, d'une seule. Le premier terme est dz, valeur principale de Δz, ainsi que cela devait être.

II. — PROCÉDÉS POUR EFFECTUER LES DÉVELOPPEMENTS EN SÉRIE.

170. Dans le calcul différentiel, on a souvent besoin de développer une quantité en série suivant les puissances d'un ou de plusieurs infiniment petits, ou du moins de trouver un certain nombre de termes de ce développement. Soit, par exemple, y une fonction, $y = f(x)$, d'un seul infiniment petit x; la formule de Maclaurin, si elle est applicable, résout la question :

$$y = f(0) + xf'(0) + \ldots + \frac{x^n}{n!}f^n(0) + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}f^{n+1}(\theta x),$$

et, en négligeant le dernier terme (reste), on a la valeur de y aux infiniment petits près d'ordre supérieur à n.

Souvent, la formule de Maclaurin, appliquée directement, conduirait à des calculs très longs, à cause de la nécessité d'obtenir les dérivées successives de y; parfois aussi elle est inapplicable. Voici quelques procédés qui permettent de simplifier les opérations.

171. Produit. — Supposons qu'il s'agisse d'obtenir le développement d'un produit, en négligeant les infiniment petits d'ordre supérieur à n, par rapport à x.

Si $y = uv$, et si

$$u = Ax^\alpha + Bx^{\alpha+1} + \ldots,$$
$$v = Mx^\beta + Nx^{\beta+1} + \ldots,$$

on fera le produit uv et l'on ne gardera que les termes d'ordre égal ou inférieur à n; pour cela, il est clair qu'il suffira de s'arrêter, dans u, aux termes en $x^{n-\beta}$, et, dans v, aux termes en $x^{n-\alpha}$. On aura alors

$$y = (Ax^{\alpha} + Bx^{\alpha+1} + \ldots + Lx^{n-\beta})(Mx^{\beta} + Nx^{\beta+1} + \ldots + Px^{n-\alpha}) + \ldots$$

et, dans le produit de *deux polynomes* qui figure au second membre, on négligera les termes en x^{n+1}, x^{n+2}, ...; ce qui donnera y avec l'approximation demandée.

172. Quotient. — Soit $y = \frac{v}{u}$, u et v ayant les mêmes expressions que plus haut; cherchons de même à quels termes on doit s'arrêter dans u et v, pour que le quotient, ordonné suivant les puissances croissantes de x, donne y aux termes près d'ordre supérieur à n. Écrivons pour cela

$$v = v_1 + S, \qquad u = u_1 + R,$$

R et S étant les parties négligées dans u et v; il faut que l'expression

$$\frac{v}{u} - \frac{v_1}{u_1} = \frac{u_1 v - u v_1}{uu_1} = \frac{uS - vR}{uu_1}$$

soit, en x, d'ordre supérieur à n.

On sera sûr qu'il en est ainsi si $\frac{uS}{uu_1}$ et $\frac{vR}{uu_1}$ sont séparément d'ordre supérieur à n; comme uu_1 est d'ordre 2α et u d'ordre α, il faut que S soit d'ordre $n + \alpha + 1$; de même R devra être d'ordre $n + 2\alpha - \beta + 1$. On aura alors, aux termes près d'ordre supérieur à n,

$$y = \frac{v}{u} = \frac{Mx^{\beta} + Nx^{\beta+1} + \ldots + Px^{n+\alpha}}{Ax^{\alpha} + \ldots + Lx^{n+2\alpha-\beta}};$$

et il suffira d'effectuer la *division* des deux polynomes ci-dessus, ordonnée suivant les puissances croissantes de x, en s'arrêtant au terme en x^n, pour avoir la valeur cherchée de y.

En particulier, si $\alpha = 0$, $\beta = 0$, on prendra dans u et v jusqu'aux termes en x^n inclus, et l'on fera le quotient en s'arrêtant au même terme.

173. Exemple. — Un exemple important est le suivant :

Soit

$$y = \frac{f(x)}{(x-a)^\alpha \varphi(x)},$$

α désignant un nombre entier et positif, et $f(x)$ et $\varphi(x)$ des fonctions finies et non nulles pour $x = a$. On pose

$$x - a = h,$$

et l'on demande le développement de y suivant les puissances croissantes de h.

On a

$$y = \frac{f(a+h)}{h^\alpha \varphi(a+h)} = \frac{1}{h^\alpha} \frac{f(a) + hf'(a) + \ldots}{\varphi(a) + h\varphi'(a) + \ldots},$$

en supposant la formule de Taylor applicable à $f(a+h)$ et $\varphi(a+h)$.

Si l'on veut avoir y jusqu'aux termes en h^n (inclus), on développera le quotient

$$\frac{f(a) + hf'(a) + \ldots}{\varphi(a) + h\varphi'(a) + \ldots}$$

jusqu'aux termes en $h^{\alpha+n}$, et pour cela, d'après la règle du numéro précédent, on fera le quotient, suivant les puissances croissantes de h, des deux polynomes

$$\frac{f(a) + hf'(a) + \ldots + \dfrac{h^{\alpha+n}}{(\alpha+n)!} f^{\alpha+n}(a)}{\varphi(a) + h\varphi'(a) + \ldots + \dfrac{h^{\alpha+n}}{(\alpha+n)!} \varphi^{\alpha+n}(a)} = A + Bh + Ch^2 + \ldots + Ph^{\alpha+n},$$

en s'arrêtant au terme en $h^{\alpha+n}$. On aura alors, pour y,

$$y = \frac{A}{h^\alpha} + \frac{B}{h^{\alpha-1}} + \frac{C}{h^{\alpha-2}} + \ldots + \frac{L}{h} + M + Nh + \ldots + Ph^n.$$

Les premiers termes $\frac{A}{h^\alpha} + \ldots + \frac{L}{h}$ se nomment la *partie infinie* du développement de y au voisinage de $x = a$, parce que, pour $x = a$ (c'est-à-dire $h = 0$), ils deviennent infinis. Si l'on désire obtenir seulement la partie infinie c'est-à-dire si $n = -1$, les deux termes du quotient $\frac{f(a+h)}{\varphi(a+h)}$ devront être calculés jusqu'aux

termes en $h^{\alpha-1}$ (inclus), et dans le quotient on s'arrêtera également aux termes en $h^{\alpha-1}$, c'est-à-dire qu'on prendra au numérateur et au dénominateur autant de termes qu'on désire en obtenir au quotient.

174. Il est parfois impossible de développer une fonction suivant les puissances croissantes de x; la fonction $\log x$ en est un exemple.

En effet, si l'on avait

$$\log x = Ax^\alpha + Bx^{\alpha+1} + Cx^{\alpha+2} + \ldots,$$

il faudrait que α fût négatif, puisque, pour $x = 0$, $\log x = -\infty$; soit $\alpha = -m$, on aurait alors

$$x^m \log x = A + Bx + Cx^2 + \ldots,$$

ce qui est impossible, car, pour $x = 0$, le premier membre tend vers zéro, quelque petit que soit m, et le second tend vers A, qui n'est pas nul, puisque Ax^α a été supposé le premier terme du développement.

Si l'on a une expression telle que

$$\log u = \log(Ax^\alpha + Bx^{\alpha+1} + \ldots),$$

on peut obtenir un développement comprenant un terme en $\log x$, suivi de termes en x. On écrira

$$\log u = \log Ax^\alpha\left(1 + \frac{B}{A}x + \ldots\right) = \log A + \alpha \log x + \log\left(1 + \frac{B}{A}x + \ldots\right).$$

Si l'on pose

$$R = \frac{B}{A}x + \ldots,$$

$\log(1 + R)$ sera développable, au voisinage de $x = 0$, par la série connue (n° **161**)

$$\log(1 + R) = R - \frac{R^2}{2} + \frac{R^3}{3} - \ldots,$$

et en développant R, R^2, R^3, ... jusqu'à l'ordre n, on aura

$$\log u = \alpha \log x + \log A + ax + bx^2 + \ldots + lx^n,$$

aux termes près d'ordre supérieur à n.

175. Développement suivant les puissances décroissantes de x. — Nous avons supposé jusqu'ici que x était un infiniment petit, et nous avons cherché des développements, applicables à des valeurs très petites de x, et ordonnés suivant les puissances croissantes de cette variable.

Si au contraire x est un infiniment grand, on posera $x = \frac{1}{z}$; z sera un infiniment petit, et la fonction $y = f(x) = f\left(\frac{1}{z}\right)$ pourra être développée, par les méthodes précédentes, suivant les puissances *croissantes* de z :

$$y = A z^{\alpha} + B z^{\alpha+1} + C z^{\alpha+2} + \ldots,$$

d'où, en faisant $\alpha = -m$,

$$y = A x^{m} + B x^{m-1} + C x^{m-2} + \ldots,$$

ce qui donne un développement de y suivant les puissances *décroissantes* de l'infiniment grand x.

Bien entendu, un tel développement n'est pas toujours possible; par exemple, pour l'exponentielle e^x, on ne saurait avoir

$$e^x = A x^{m} + B x^{m-1} + \ldots,$$

car m devrait être plus grand que zéro, puisque $e^x = \infty$ pour x infini; il viendrait alors

$$\frac{e^x}{x^m} = A + \frac{B}{x} + \ldots,$$

ce qui est absurde, puisque le premier membre tend vers l'infini pour x infini, tandis que le second membre reste fini.

De même on ne peut avoir

$$\log x = A x^{m} + B x^{m-1} + \ldots,$$

car m serait positif, et il viendrait

$$\frac{1}{x^m} \log x = A + \frac{B}{x} + \ldots,$$

ce qui est impossible, car pour $x = \infty$ le premier tend vers zéro, quelque petit que soit m, et le second membre tend vers A.

176. Certaines expressions ne sont commodément développables qu'après un changement de variable; voici deux exemples :

1° Soit à développer $\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$ suivant les puissances croissantes de $\frac{1}{n}$.

Désignons cette fonction par y; pour $n=\infty$, y est égal à e^x : c'est la valeur principale. Pour obtenir les termes suivants, prenons les logarithmes, et appliquons la formule du développement de $\log(1+u)$, établie au n° **161**,

$$\log y = n\log\left(1+\frac{x}{n}\right) = n\left(\frac{x}{n}-\frac{x^2}{2n^2}+\frac{x^3}{3n^3}-\ldots\right)$$
$$= x-\frac{x^2}{2n}+\frac{x^3}{3n^2}-\frac{x^4}{4n^3}+\ldots.$$

On a ainsi le développement de $\log y$. On en déduira celui de y par la formule

$$y = e^{\log y} = e^{x-\frac{x^2}{2n}+\ldots} = e^x e^{\mathrm{R}},$$

en posant

$$\mathrm{R} = -\frac{x^2}{2n}+\frac{x^3}{3n^2}-\ldots,$$

d'où

$$y = e^x\left[1+\mathrm{R}+\frac{\mathrm{R}^2}{2!}+\frac{\mathrm{R}^3}{3!}+\ldots\right].$$

Si l'on veut s'arrêter aux termes en $\frac{1}{n^3}$, inclus, on ne poussera pas plus loin que $\frac{\mathrm{R}^3}{3!}$ dans le crochet, et l'on aura

$$y = e^x\left[1-\frac{x^2}{2n}+\frac{x^3}{3n^2}-\frac{x^4}{4n^3}+\frac{1}{2}\left(\frac{x^4}{4n^2}-\frac{x^5}{3n^3}\right)-\frac{1}{6}\,\frac{x^6}{8n^3}\right]+\ldots$$
$$= e^x\left[1-\frac{x^2}{2n}+\frac{1}{n^2}\left(\frac{x^3}{3}+\frac{x^4}{8}\right)-\frac{1}{n^3}\left(\frac{x^4}{4}+\frac{x^5}{6}+\frac{x^6}{48}\right)\right]+\ldots,$$

les termes négligés étant au moins d'ordre 4 par rapport à $\frac{1}{n}$.

2° On développera d'une manière analogue $y = n(\sqrt[n]{x}-1)$ suivant les puissances croissantes de $\frac{1}{n}$; on écrira

$$\sqrt[n]{x} = e^{\frac{1}{n}\log x} = 1+\frac{\log x}{n}+\frac{1}{2!}\,\frac{\log^2 x}{n^2}+\ldots;$$

d'où

$$y = \log x + \frac{1}{2!}\frac{\log^2 x}{n} + \frac{1}{3!}\frac{\log^3 x}{n^2} + \ldots$$

177. Remarque. — Les séries de Taylor et de Maclaurin n'ont été établies jusqu'ici que pour les fonctions de variables réelles; c'est seulement dans le Cours de seconde année qu'on les étendra aux fonctions de variables imaginaires : jusqu'à nouvel ordre, les développements ci-dessus ne sont applicables que dans le domaine réel. La question de leur *convergence* est également réservée pour une étude ultérieure.

178. Développement des fonctions implicites. — Nous indiquerons la méthode à suivre sur des exemples.

I. Soit une équation, $f(x, y) = 0$, ayant, pour $x = x_0$, *une* et *une seule* racine y égale à y_0; on demande de développer cette racine suivant les puissances croissantes de $x - x_0$. Il est clair qu'en posant $x - x_0 = X$ et $y - y_0 = Y$, on ramène ce cas à celui où $x_0 = 0$ et $y_0 = 0$; soit alors, par exemple, l'équation

$$y^3 - xy + y - 2x^2 = 0,$$

qui, pour $x = 0$, a *une* et *une seule* racine nulle. Cette racine, y, est infiniment petite avec x, et l'on voit immédiatement sur l'équation que sa valeur principale est $2x^2$; car les termes y^3 et $-xy$ sont infiniment petits devant le terme en y, de sorte que la valeur principale du premier membre de l'équation est $y - 2x^2$ (¹). On peut donc poser

$$y = x^2(2 + z),$$

z s'annulant pour $x = 0$, et l'équation devient, après suppression du facteur x^2,

$$x^4(2 + z)^3 - x(2 + z) + z = 0;$$

elle a, en z, *une* racine nulle pour $x = 0$. On reconnaît de suite, comme tout à l'heure, que la valeur principale de cette racine est $2x$, et l'on peut poser

$$z = x(2 + \zeta),$$

(¹) Le succès de ce raisonnement tient à ce que l'équation contient un terme en y : or, l'existence de ce terme résulte nécessairement de l'hypothèse que, pour $x = 0$, il y a une *seule* racine y nulle.

ζ s'annulant pour $x = 0$. On formera alors l'équation ζ, et ainsi de suite, ce qui donnera, en remontant la série des calculs, le développement cherché de la racine y :

$$y = 2x^2 + 2x^3 + \ldots.$$

II. Si, pour $x = 0$, l'équation proposée a h racines y égales à zéro, le terme de moindre degré en y qui reste dans l'équation, après que l'on a fait $x = 0$, est un terme en y^h; on ne peut plus alors, comme dans le cas précédent, indiquer immédiatement les deux termes qui constituent la valeur principale du premier membre.

Soit par exemple l'équation

$$(1) \qquad y^3 - xy + x^3 = 0,$$

qui, pour $x = 0$, a trois racines nulles.

Si α désigne l'ordre de l'une d'elles par rapport à l'infiniment petit x, posons

$$(2) \qquad y = x^\alpha(\text{A} + z),$$

A étant une constante $\gtrless 0$ et z s'annulant pour $x = 0$. Il s'agit d'abord de déterminer α et A. Portons la valeur (2) de y dans (1); il vient

$$(3) \qquad x^{3\alpha}(\text{A} + z)^3 - x^{\alpha+1}(\text{A} + z) + x^3 = 0.$$

Dans le premier membre, les termes du degré minimum en x sont évidemment compris parmi ceux de la somme

$$(4) \qquad \text{A}^3 x^{3\alpha} - \text{A}\, x^{\alpha+1} + x^3;$$

et je dis d'abord qu'il doit y avoir au moins deux termes du degré minimum. Car, s'il n'y en avait qu'un, son coefficient devrait être nul, puisque le premier membre de (3) doit s'annuler identiquement quand on y remplace z par son développement en x; or aucun des termes de la somme (4) ne peut avoir son coefficient nul, puisque A est supposé $\gtrless 0$. Il faut donc qu'il y ait, dans (4), au moins deux termes du degré minimum (se détruisant entre eux); c'est-à-dire que : 1° deux des exposants 3α, $\alpha + 1$, 3 doivent être égaux entre eux, et 2° être inférieurs (ou au plus égaux) au troisième.

On a donc à examiner les trois hypothèses qui satisfont à 1°:

(a) $3\alpha = \alpha + 1$, ou $\alpha = \frac{1}{2}$,

(b) $\alpha + 1 = 3$, ou $\alpha = 2$,

(c) $3\alpha = 3$, ou $\alpha = 1$.

L'hypothèse (c) est à rejeter, car les deux exposants égaux, 3α et 3, sont supérieurs au troisième, $\alpha + 1 (= 2)$ et la condition 2° n'est pas vérifiée. Au contraire, les hypothèses (a) et (b) sont acceptables.

(a). On a $\alpha = \frac{1}{2}$, et les termes de moindre degré dans (4) sont

$$A^3 x^{\frac{3}{2}} - A x^{\frac{3}{2}};$$

comme ils doivent se détruire, il faut que $A^3 - A = 0$; et comme A est différent de zéro par hypothèse, on a

$$A = \pm 1.$$

Prenons d'abord $A = 1$; il vient dans (2)

$$y = x^{\frac{1}{2}}(1 + z),$$

z s'annulant, comme on l'a dit, pour $x = 0$; et dans (3), après suppression du facteur commun $x^{\frac{3}{2}}$, et réduction :

$$z^3 + 3z^2 + 2z + x^{\frac{3}{2}} = 0,$$

équation qui, pour $x = 0$, n'a qu'une racine z nulle : la valeur principale de celle-ci est $-\frac{1}{2}x^{\frac{3}{2}}$, et l'on obtiendra son développement comme dans le cas I.

On a ainsi, pour une des racines, y_1, de l'équation primitive (1),

$$y_1 = x^{\frac{1}{2}}\left(1 - \frac{1}{2}x^{\frac{3}{2}} + \ldots\right) = x^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}x^2 + \ldots.$$

En prenant $A = -1$, on aurait un développement analogue pour une autre racine :

$$y_2 = -x^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}x^2 + \ldots.$$

(b). On a $\alpha = 2$; les termes de moindre degré en x, dans (4), sont

$$-Ax^3 + x^3;$$

d'où $A = 1$; les équations (2) et (3) deviennent alors

$$y = x^2(1+z),$$
$$x^3z^3 + 3x^3z^2 + (3x^3 - 1)z + x^3 = 0.$$

Cette dernière, pour $x = 0$, a une et une seule racine z nulle, dont la valeur principale est x^3, et qu'on développera comme dans le cas I. On a ainsi, pour la troisième racine, y_3, de la proposée (1),

$$y_3 = x^2 + x^5 + \ldots.$$

Le procédé s'applique sans difficulté au cas général; on démontre que si $f(x, y) = 0$ est une *équation algébrique* admettant, pour $x = 0$, h racines nulles, cette méthode donne sans ambiguïté les développements des h racines, et que les développements sont convergents pour des valeurs suffisamment petites de x.

CHAPITRE VIII.

MAXIMA ET MINIMA.

---

179. Définitions. — On dit qu'une fonction, $f(x)$, d'une seule variable, est *maximum* pour $x = a$, si l'on peut déterminer un nombre η (si petit qu'il soit) tel que l'on ait

$$f(a+h) - f(a) < 0,$$

pour toute valeur non nulle de h comprise entre $-\eta$ et $+\eta$.

Elle sera *minimum* si, dans les mêmes conditions,

$$f(a+h) - f(a) > 0.$$

De même, une fonction de deux variables, $f(x, y)$ sera *maximum* pour $x = a$, $y = b$, si l'on peut déterminer un nombre η tel que l'on ait

$$f(a+h, b+k) - f(a, b) < 0$$

pour toutes les valeurs, non nulles simultanément, de h et k comprises entre $-\eta$ et $+\eta$.

Il y aura *minimum* si la différence ci-dessus est positive dans les mêmes conditions.

Géométriquement, marquons sur le plan le point de coordonnées rectangulaires a, b : pour que $f(x, y)$ soit maximum ou minimum pour $x = a$, $y = b$, il faut, d'après la définition, qu'on puisse tracer un carré, de côtés parallèles aux axes, ayant pour centre le point a, b, et tel que, pour tous les points x, y intérieurs au carré, la différence $f(x, y) - f(a, b)$ garde un signe constant. Le côté du carré est 2η.

On peut remplacer le carré par un cercle de centre a, b : car, si le carré existe, la différence $f(x, y) - f(a, b)$ gardera *a fortiori* un signe constant pour tous les points x, y intérieurs au cercle inscrit dans le carré. Réciproquement, si un tel cercle existe, on en déduira l'existence d'un carré, de centre a, b, jouissant de la même propriété, et qui sera, par exemple, le carré inscrit au cercle et de côtés parallèles aux axes.

180. Fonctions d'une variable. — Si $f(x)$ a une dérivée déterminée pour $x = a$, on aura, par la définition même de la dérivée,

$$f(a+h)-f(a) = h[f'(a)+\varepsilon], \tag{1}$$

ε tendant vers zéro avec h.

Quand h décroît indéfiniment en valeur absolue, le second membre finit par avoir le signe de $hf'(a)$: le premier membre, si $f'(a)$ n'est pas nul, change donc de signe avec h, c'est-à-dire qu'il n'y a ni maximum ni minimum pour $x = a$.

Donc, lorsque, pour $x = a$, $f(x)$ a une dérivée déterminée, il ne peut y avoir maximum ou minimum que si $f'(a) = 0$; lorsque $f(x)$ n'a pas de dérivée déterminée, on ne peut rien dire, c'est-à-dire qu'il peut y avoir maximum ou minimum. En d'autres termes :

La fonction $f(x)$ ne peut être maximum ou minimum que pour les valeurs qui rendent sa dérivée indéterminée (¹) *ou nulle.*

Soit a une de ces valeurs, que l'on déterminera par l'étude de la dérivée; on aura dans chaque cas particulier à faire une discussion spéciale, afin de voir si $f(a+h)-f(a)$ garde un signe constant pour des valeurs de h assez petites, positives et négatives.

181. Cette discussion n'offre aucune difficulté quand on peut appliquer à $f(a+h)$ la formule de Taylor. En ce cas, a est certainement une valeur annulant $f'(x)$, car $f'(x)$ est, par hypothèse, déterminée et continue pour $x = a$; on a alors

$$f(a+h)-f(a) = \frac{h^2}{2}[f''(a)+\varepsilon]. \tag{2}$$

Pour h assez petit et quel que soit son signe, le second membre a le signe de $f''(a)$; il y aura donc maximum si $f''(a) < 0$ et minimum si $f''(a) > 0$.

Si $f''(a) = 0$, et plus généralement si

$$f''(a) = f'''(a) = \ldots = f^{n}(a) = 0,$$

(¹) Parmi les valeurs qui rendent la dérivée indéterminée sont comprises celles qui la rendent infinie.

on aura

$$(3)\qquad f(a+h)-f(a)=\frac{h^{n+1}}{(n+1)!}[f^{n+1}(a)+\varepsilon];$$

et le premier membre, pour h assez petit, aura le signe de $h^{n+1}f^{n+1}(a)$. Si donc $n+1$ est impair (n pair), comme ce signe change avec celui de h, il n'y aura ni maximum ni minimum; si $n+1$ est pair (n impair), le signe restera celui de $f^{n+1}(a)$, et il y aura maximum pour $f^{n+1}(a)<0$, minimum pour $f^{n+1}(a)>0$.

182. Fonctions de plusieurs variables. — Pour que $f(x, y)$ soit maximum ou minimum pour $x=a$, $y=b$, il faut que

$$f(a+h,\ b+k)-f(a,b)$$

conserve un signe constant lorsque h et k sont, en valeur absolue, inférieurs à η; donc, en particulier, si l'on fait $k=0$, on voit que

$$f(a+h,\ b)-f(a,b)$$

doit garder le même signe, c'est-à-dire que $f(x, b)$, considérée comme fonction de x seul, doit être maximum ou minimum pour $x=a$.

Il est donc *nécessaire,* pour un maximum ou un minimum, que la dérivée partielle $\frac{\partial f}{\partial x}$ soit indéterminée ou nulle pour $x=a$, $y=b$; une démonstration analogue s'applique à l'autre dérivée partielle; de sorte que :

La fonction $f(x, y)$ ne peut être maximum ou minimum que pour les systèmes de valeurs qui rendent ses dérivées partielles indéterminées ou nulles.

Soit a, b un de ces systèmes de valeurs que l'on déterminera par l'étude des dérivées de la fonction; on aura, dans chaque cas, à faire une discussion, pour voir si $f(a+h,\ b+k)-f(a,b)$ garde un signe constant.

183. Comme plus haut, cette discussion est facile quand on peut appliquer à $f(a+h,\ b+k)$ la formule de Taylor : en ce cas, $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$, qui sont déterminées d'après l'hypothèse, s'annulent

pour $x = a$, $y = b$, et l'on a (n° 168)

$$f(a+h,\ b+k) - f(a,\ b)$$
$$= \frac{1}{2}(h^2 f''_{a^2} + 2hk f''_{ab} + k^2 f''_{b^2}) + \frac{1}{6}[h^3 f'''_{a^3}(a+\theta h,\ b+\theta k) + \ldots].$$

Pour qu'il y ait maximum ou minimum, il faut, comme on l'a vu (n° 179), qu'on puisse déterminer un cercle de centre a, b, tel que le premier membre garde un signe constant pour tous les points $a+h$, $b+k$ intérieurs à ce cercle, c'est-à-dire pour toutes les valeurs de h et de k qui rendent $\sqrt{h^2+k^2}$ inférieur au rayon, ρ_0, du cercle. Posons alors

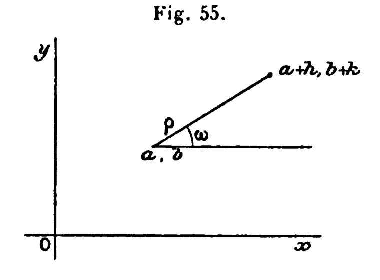
$$h = \rho\cos\omega,$$
$$k = \rho\sin\omega,$$

ρ et ω étant indiqués sur la figure 55; on a

$$(4)\quad \begin{cases} f(a+h,\ b+k) - f(a,\ b) \\ \quad = \dfrac{\rho^2}{2}(\cos^2\omega f''_{a^2} + 2\cos\omega\sin\omega f''_{ab} + \sin^2\omega f''_{b^2}) + M\rho^3, \end{cases}$$

et il faut, pour qu'il y ait maximum ou minimum, qu'on puisse déterminer un nombre positif, ρ_0, tel que le second membre garde

Fig. 55.



un signe constant pour toutes les valeurs de ρ inférieures à ρ_0, et quel que soit l'angle ω.

Considérons le trinome

$$\cos^2\omega f''_{a^2} + 2\cos\omega\sin\omega f''_{ab} + \sin^2\omega f''_{b^2},$$

qui s'écrit

$$\cos^2\omega(f''_{a^2} + 2\tang\omega f''_{ab} + \tang^2\omega f''_{b^2}).$$

Il est clair que si ses racines (en $\tang\omega$) sont réelles, c'est-

à-dire si $f''^2_{ab} - f''_{a^2} f''_{b^2} > 0$, ce trinome changera de signe selon les valeurs de $\tang\omega$, et comme on peut prendre ρ assez petit pour que le second membre de (4) ait le signe du premier terme, c'est-à-dire du trinome, il n'y a ni maximum ni minimum.

Au contraire, si les racines du trinome sont imaginaires, c'est-à-dire si $f''^2_{ab} - f''_{a^2} f''_{b^2} < 0$, le trinome a toujours le signe de f''_{b^2} et ne s'annule pour aucune valeur de ω : on en conclut que, si ρ reste assez petit en valeur absolue, le second membre de (4) garde, quel que soit ω, un signe constant, celui de f''_{b^2}. Donc, si $f''_{b^2} < 0$, il y a maximum; si $f''_{b^2} > 0$, minimum.

Enfin, si les racines du trinome sont égales, c'est-à-dire si $f''^2_{ab} - f''_{a^2} f''_{b^2} = 0$, le trinome s'annule pour une valeur de $\tang\omega$: pour les valeurs correspondantes de ω, c'est le terme en ρ^3 qui donne son signe, et une discussion spéciale sera nécessaire pour décider si ce signe est le même que celui qui correspond aux autres valeurs de ω.

En résumé, pour

$$(5)\quad \begin{cases} f''^2_{ab} - f''_{a^2} f''_{b^2} > 0, & \text{ni maximum ni minimum.} \\ f''^2_{ab} - f''_{a^2} f''_{b^2} < 0, & \text{maximum si } f''_{b^2} < 0\text{; minimum si } f''_{b^2} > 0, \\ f''^2_{ab} - f''_{a^2} f''_{b^2} = 0, & \text{doute; une discussion spéciale est nécessaire.} \end{cases}$$

184. Remarque. — Au lieu de dire que $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ s'annulent pour les valeurs qui correspondent au maximum ou au minimum, on peut dire que la *différentielle totale*

$$\frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy$$

s'annule, quels que soient dx et dy.

185. Maxima et minima relatifs. — Soit à trouver les maxima et les minima d'une fonction de *quatre* variables

$$f(x, y, z, u),$$

ces quatre variables étant liées par *deux* relations

$$\varphi(x, y, z, u) = 0,$$

$$\psi(x, y, z, u) = 0.$$

Il y a, d'après cela, $4-2=2$ variables indépendantes, x et y, par exemple; laissant de côté les cas exceptionnels d'indétermination, on trouvera les maxima et minima en écrivant que la différentielle totale, df, est nulle, quels que soient dx et dy. Donc

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz + \frac{\partial f}{\partial u}du = 0, \tag{6}$$

dz et du étant liés à dx et dy par les relations

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y}dy + \frac{\partial \varphi}{\partial z}dz + \frac{\partial \varphi}{\partial u}du = 0, \tag{7}$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial x}dx + \frac{\partial \psi}{\partial y}dy + \frac{\partial \psi}{\partial z}dz + \frac{\partial \psi}{\partial u}du = 0. \tag{8}$$

Il faut donc tirer dz et du de (7) et (8), porter dans (6), et écrire que les coefficients de dx et dy sont nuls dans le résultat : cela revient à éliminer dz et du entre (6), (7) et (8), et à écrire que, dans le résultat, dx et dy disparaissent. Pour effectuer cette élimination, multiplions (7) et (8) par des facteurs indéterminés, λ et μ, puis ajoutons-les à (6); il viendra

$$(9)\quad \left\{\begin{aligned} &\left(\frac{\partial f}{\partial x} + \lambda\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \mu\frac{\partial \psi}{\partial x}\right)dx + \left(\frac{\partial f}{\partial y} + \lambda\frac{\partial \varphi}{\partial y} + \mu\frac{\partial \psi}{\partial y}\right)dy \\ &+ \left(\frac{\partial f}{\partial z} + \lambda\frac{\partial \varphi}{\partial z} + \mu\frac{\partial \psi}{\partial z}\right)dz + \left(\frac{\partial f}{\partial u} + \lambda\frac{\partial \varphi}{\partial u} + \mu\frac{\partial \psi}{\partial u}\right)du = 0.\end{aligned}\right.$$

L'élimination de dz et du sera effectuée si nous choisissons λ et μ de manière que

$$\frac{\partial f}{\partial z} + \lambda\frac{\partial \varphi}{\partial z} + \mu\frac{\partial \psi}{\partial z} = 0, \qquad \frac{\partial f}{\partial u} + \lambda\frac{\partial \varphi}{\partial u} + \mu\frac{\partial \psi}{\partial u} = 0. \tag{10}$$

Écrivons alors que dans (9) les coefficients de dx et dy sont nuls :

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \lambda\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \mu\frac{\partial \psi}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} + \lambda\frac{\partial \varphi}{\partial y} + \mu\frac{\partial \psi}{\partial y} = 0. \tag{11}$$

Les équations (10), (11), jointes à $\varphi=0$, $\psi=0$ (soit en tout six équations) donneront les valeurs de λ et μ, et celles de x, y, z, u qui peuvent correspondre au maximum ou au minimum de f. D'où la règle suivante :

Règle. — *Pour trouver les maxima et les minima d'une*

fonction f, de n variables liées par h relations :

$$\varphi_1 = 0, \quad \ldots, \quad \varphi_h = 0,$$

on annulera les dérivées partielles, par rapport aux n variables, de la fonction

$$f + \lambda_1 \varphi_1 + \lambda_2 \varphi_2 + \ldots + \lambda_h \varphi_h,$$

les λ_i étant regardés comme constants. *On obtiendra ainsi n équations qui, jointes aux h équations $\varphi = 0$, donneront (avec les valeurs des h quantités λ_i) les valeurs des n variables qui correspondent au maximum ou au minimum de f.*

Applications.

186. Axes d'une section centrale d'une quadrique. — Soit, en coordonnées rectangulaires, la quadrique, qui admet pour centre l'origine,

(12) $$A x^2 + A' y^2 + A'' z^2 + 2 B y z + 2 B' z x + 2 B'' x y + 1 = 0;$$

les demi-axes de sa section par le plan central

(13) $$l x + m y + n z = 0$$

sont les maxima et les minima de la distance du centre à un point de la section. On a donc à déterminer le maximum et le minimum de $x^2 + y^2 + z^2$; x, y, z étant liés par (12) et (13). Appliquons la règle ci-dessus, nous avons, en supprimant le facteur 2 :

(14) $$\left\{\begin{array}{l} x + \lambda l + \mu(A x + B'' y + B' z) = 0, \\ y + \lambda m + \mu(B'' x + A' y + B z) = 0, \\ z + \lambda n + \mu(B' x + B y + A'' z) = 0, \end{array}\right.$$

équations qui, jointes à (12) et (13), déterminent λ, μ et les sommets x, y, z de la section. Pour avoir les longueurs des demi-axes eux-mêmes, il faut joindre à ces équations la relation

(15) $$r^2 = x^2 + y^2 + z^2,$$

et éliminer λ, μ, x, y, z entre (12), (13), (14) et (15).

Le calcul se fait simplement si l'on multiplie la première équation (14) par x, la seconde par y, la troisième par z, et si l'on

ajoute membre à membre; il vient en effet, en tenant compte de (13) et (12),

$$r^2 - \mu = 0.$$

On a alors, en portant cette valeur de μ dans (14) et en récrivant (13),

$$\begin{aligned}
&x(1+Ar^2) + yB''r^2 + zB'r^2 + \lambda l = 0,\\
&xB''r^2 + y(1+A'r^2) + zBr^2 + \lambda m = 0,\\
&xB'r^2 + yBr^2 + z(1+A''r^2) + \lambda n = 0,\\
&xl + ym + zn = 0,
\end{aligned}$$

équations linéaires et homogènes en x, y, z et λ; l'élimination de ces quantités donne :

$$\begin{vmatrix} 1+Ar^2 & B''r^2 & B'r^2 & l \\ B''r^2 & 1+A'r^2 & Br^2 & m \\ B'r^2 & Br^2 & 1+A''r^2 & n \\ l & m & n & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

équation du second degré en r^2, dont les racines sont les carrés des deux demi-axes de la section.

187. Axes de la quadrique

$$Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Byz + 2B'zx + 2B''xy + 1 = 0.$$

On a à chercher le maximum ou le minimum de $x^2 + y^2 + z^2$, x, y, z étant liés par l'équation précédente. Écrivons donc

$$(16) \quad \begin{cases} x + \lambda(A\,x + B''y + B'\,z) = 0, \\ y + \lambda(B''x + A'y + B\,z) = 0, \\ z + \lambda(B'x + B\,y + A''z) = 0. \end{cases}$$

Joignons-y la relation

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2,$$

et éliminons x, y, z et λ entre ces cinq équations : nous obtiendrons l'équation aux carrés r^2 des demi-axes. A cet effet, multiplions respectivement par x, y, z les trois équations (16) et ajoutons; il vient, en tenant compte de l'équation de la quadrique,

$$r^2 - \lambda = 0.$$

Les équations (16) s'écrivent alors

$$\begin{array}{llll} x(1+A r^2) & +y B'' r^2 & +z B' r^2 & =0, \\ x B'' r^2 & +y(1+A' r^2) & +z B r^2 & =0, \\ x B' r^2 & +y B r^2 & +z(1+A'' r^2) & =0; \end{array}$$

d'où, en éliminant x, y, z,

$$\begin{vmatrix} 1+A r^2 & B'' r^2 & B' r^2 \\ B'' r^2 & 1+A' r^2 & B r^2 \\ B' r^2 & B r^2 & 1+A'' r^2 \end{vmatrix} = 0.$$

C'est l'équation cherchée; elle est du troisième degré en r^2, comme on devait s'y attendre.

188. Méthode géométrique. — La Géométrie permet souvent de trouver directement les conditions des maxima et des minima.

En effet, si l'on a à chercher par exemple le maximum ou le minimum d'une fonction $f(x, y, z)$ de trois variables indépendantes, on devra écrire

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 0, \qquad \frac{\partial f}{\partial z} = 0.$$

Or $\frac{\partial f}{\partial x}\,dx$ est la valeur principale de l'accroissement de f quand, y et z restant fixes, on fait varier x; et l'on peut faire la même observation sur $\frac{\partial f}{\partial y}\,dy$ et $\frac{\partial f}{\partial z}\,dz$; si donc la Géométrie permet d'évaluer directement ces trois valeurs principales, on n'aura qu'à exprimer qu'elles sont nulles pour obtenir les conditions du maximum ou du minimum.

D'autres fois, on pourra évaluer géométriquement la différentielle totale df, pour des accroissements *simultanés* quelconques des variables indépendantes et l'on exprimera qu'elle est nulle, quels que soient ces accroissements.

Voici des exemples.

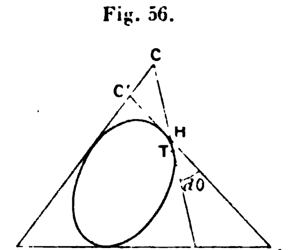
189. Problème I. — *Triangle d'aire maximum ou minimum circonscrit à une courbe donnée.* — Un triangle circonscrit à une courbe dépend de trois variables indépendantes, à savoir les paramètres qui déterminent chacune des trois tangentes qui le

constituent, par exemple les angles de ces tangentes avec une droite fixe.

Pour écrire que l'aire est maximum ou minimum, il faut donc exprimer que la valeur principale de son accroissement est nulle quand, deux quelconques des côtés du triangle restant fixes, le troisième varie infiniment peu.

Par exemple, ABC étant (*fig.* 56) un triangle circonscrit à la

Fig. 56.



courbe, laissons fixes les côtés AB et AC, et faisons varier BC en B'C'; l'accroissement de l'aire du triangle est BHB' — CHC'. Or

$$\mathrm{BHB'} - \mathrm{CHC'} = \frac{1}{2}(\mathrm{HB}.\mathrm{HB'} - \mathrm{HC}.\mathrm{HC'})\sin d\theta.$$

A la limite, quand B'C' tend vers BC, le point H tend vers le point de contact T de la tangente BC; HB' et HC' tendent vers TB et TC, de sorte que

$$\text{Valeur principale de } (\mathrm{BHB'} - \mathrm{CHC'}) = \frac{1}{2}\,d\theta(\overline{\mathrm{TB}}^2 - \overline{\mathrm{TC}}^2);$$

et, pour qu'il puisse y avoir maximum, il faut que TB = TC, c'est-à-dire que T soit le milieu de BC. Ainsi :

Pour le triangle d'aire maximum ou minimum circonscrit à une courbe, les points de contact sont au milieu des côtés.

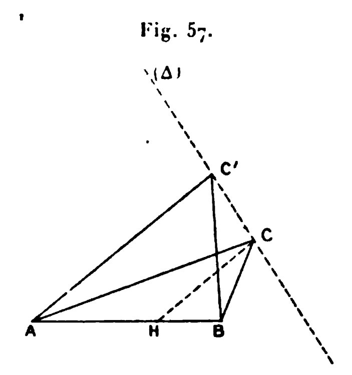
190. **Problème II.** — *Parmi les triangles qui ont leurs sommets respectivement situés sur trois droites données de l'espace, quel est celui dont le périmètre (ou l'aire) est maximum ou minimum?*

Soit ABC (*fig.* 57) un de ces triangles; pour trouver les con-

ditions du maximum ou du minimum du périmètre, laissons les sommets A et B fixes, et faisons varier infiniment peu le sommet C en C′ sur la droite (Δ) qu'il décrit.

Il faut, pour qu'il y ait maximum ou minimum, que la différentielle du périmètre du triangle ABC soit nulle, c'est-à-dire que

Fig. 57.



l'on ait, en négligeant les infiniment petits du second ordre par rapport à CC′,

$$CA + CB = C'A + C'B.$$

En d'autres termes, les points C et C′ doivent être sur un même ellipsoïde de révolution ayant les points A et B pour foyers. Sous une autre forme, en passant à la limite, la droite (Δ) est tangente en C à l'ellipsoïde de révolution, de foyers A et B, qui passe par C, ou encore la droite (Δ) est perpendiculaire en C à la bissectrice CH de l'angle ACB, puisque celle-ci est la normale de l'ellipsoïde au point C.

Le même raisonnement s'applique aux autres sommets A et B, de sorte que :

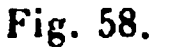
Le maximum ou le minimum du périmètre correspond au cas où les bissectrices du triangle sont respectivement normales aux droites décrites par les sommets.

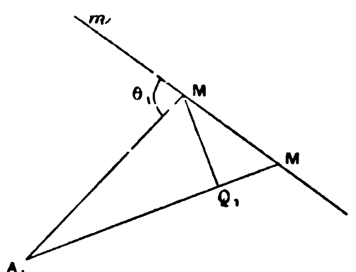
On verrait de même que :

Le maximum ou le minimum de l'aire correspond au cas où les hauteurs du triangle sont respectivement normales aux droites décrites par les sommets.

191. Problème III. — *Trouver sur une surface donnée un point* M, *dont la somme des carrés des distances à n points donnés* $A_1, A_2, \ldots, A_n$, *soit maximum ou minimum.*

Soient M (*fig.* 58) le point cherché, et M′ un point infiniment


Fig. 58.



voisin *quelconque* situé sur la surface; il faut écrire que la différentielle de la somme $\Sigma \overline{A_i M}^2$ est nulle, quand on passe de M à M′.

Or, si MM′ est l'infiniment petit principal, l'angle MA_1M' est évidemment du premier ordre; si donc on mène MQ_1 normal à A_1M', on aura $A_1M = A_1Q_1$, au second ordre près (n° 14), de sorte que la différentielle de A_1M, quand on passe de M à M′, sera

$$d(A_1M) = Q_1M'.$$

Si θ_1 est l'angle A_1Mm, on a, pour valeur principale de Q_1M',

$$\text{Valeur principale } Q_1M' = MM'\cos\theta_1,$$

d'où

$$d(A_1M) = MM'\cos\theta_1.$$

La différentielle de la somme $\Sigma \overline{A_i M}^2$ sera ainsi

$$2\Sigma \overline{A_i M}\, d(A_iM) = 2MM'\Sigma A_iM\cos\theta_i,$$

et, comme elle est nulle pour le maximum ou le minimum, on a

$$\overline{MA_1}\cos\theta_1 + \overline{MA_2}\cos\theta_2 + \ldots = 0,$$

ce qui exprime que les projections des vecteurs MA_1, MA_2, … sur une direction quelconque, Mm, du plan tangent à la surface en M, ont une somme nulle.

On en conclut que la normale à la surface en M passe par le

centre des moyennes distances des points $A_1, A_2, \ldots, A_n$. Prenons, en effet, comme origine des coordonnées le point M; pour plan des xy le plan tangent et pour axe des z la normale en ce point; soient x_i, y_i, z_i les coordonnées de A_i. En projetant les vecteurs MA_i sur les axes des x et des y, on a, par ce qui précède, $\Sigma x_i = 0$ et $\Sigma y_i = 0$; le centre des moyennes distances des A_i ayant pour coordonnées x et y les quantités $\frac{1}{n}\Sigma x_i$ et $\frac{1}{n}\Sigma y_i$ est donc bien sur l'axe des z, ce qui établit la proposition. Ainsi :

Les points M *cherchés sont les pieds des normales qu'on peut mener à la surface par le point* G, *centre des moyennes distances des n points* A_i *donnés.*

192. Nous terminerons ces applications par un exemple où le minimum peut correspondre aux valeurs qui rendent les dérivées partielles indéterminées.

Problème. — *Trouver, dans le plan d'un triangle* $A_1A_2A_3$, *un point* M *dont la somme des distances aux trois sommets soit minimum.*

Si x, y sont les coordonnées de M, a_i, b_i celles de A_i, il faut chercher le minimum de la fonction de deux variables indépendantes x et y,

$$\begin{aligned} f(x,y) = {} & \sqrt{(x-a_1)^2+(y-b_1)^2} \\ & + \sqrt{(x-a_2)^2+(y-b_2)^2} + \sqrt{(x-a_3)^2+(y-b_3)^2}. \end{aligned}$$

Annulons les dérivées partielles :

$$(3)\qquad \left\{ \begin{aligned} -\frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{a_1-x}{\rho_1} + \frac{a_2-x}{\rho_2} + \frac{a_3-x}{\rho_3} = 0, \\ -\frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{b_1-y}{\rho_1} + \frac{b_2-y}{\rho_2} + \frac{b_3-y}{\rho_3} = 0; \end{aligned} \right.$$

en posant, pour abréger,

$$\rho_i = +\sqrt{(x-a_i)^2+(y-b_i)^2}.$$

Les équations (3) donnent les coordonnées de M; on peut les interpréter géométriquement.

En effet, portons sur le rayon MA_i, à partir de M et en allant

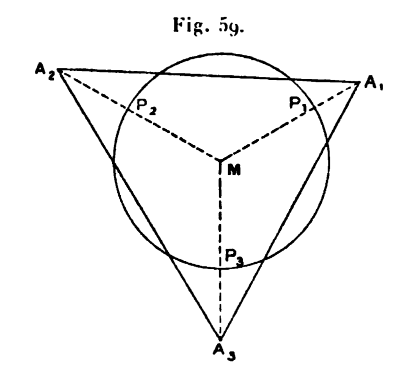
vers A_i, une longueur MP_i égale à l'unité : les projections de MP_i sur les axes sont évidemment $\frac{a_i - x}{\rho_i}$, $\frac{b_i - y}{\rho_i}$; d'ailleurs, si α_i, β_i sont les coordonnées de P_i, ces projections sont aussi $\alpha_i - x$, $\beta_i - x$.

Les équations (3) peuvent donc s'écrire

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 - 3x = 0, \qquad \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 - 3y = 0,$$

c'est-à-dire que M (*fig.* 59) est le centre de gravité du triangle $P_1 P_2 P_3$. Or le centre M d'un cercle ne peut être le centre de

Fig. 59.



gravité d'un triangle inscrit que si celui-ci est équilatéral; car les médianes doivent passer par le centre et sont, dès lors, perpendiculaires aux côtés opposés. Donc $P_1 P_2 P_3$ est équilatéral, c'est-à-dire que les trois angles (en M) sous lesquels on voit de M les trois côtés du triangle primitif, $A_1 A_2 A_3$, sont égaux à 120°.

D'après cela, le point M est à l'intersection de deux arcs, capables chacun d'un angle de 120°, décrits sur $A_1 A_2$ et $A_1 A_3$, et l'on voit sans difficulté qu'il n'est réel que si le triangle $A_1 A_2 A_3$ n'a pas d'angle supérieur à 120°.

Si le point M est réel, il correspond à un minimum; car on a, d'après les expressions (3) de $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{(y - b_1)^2}{\rho_1^3} + \frac{(y - b_2)^2}{\rho_2^3} + \frac{(y - b_3)^2}{\rho_3^3},$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{(x - a_1)^2}{\rho_1^3} + \ldots,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \, \partial y} = \frac{(x - a_1)(y - b_1)}{\rho_1^3} + \ldots,$$

et l'expression

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}\right)^2 - \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

est de la forme

$$(\lambda\lambda' + \mu\mu' + \nu\nu')^2 - (\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2)(\lambda'^2 + \mu'^2 + \nu'^2),$$

c'est-à-dire

$$-(\lambda\mu' - \lambda'\mu)^2 - (\lambda\nu' - \lambda'\nu)^2 - (\mu\nu' - \mu'\nu)^2;$$

elle est donc toujours négative, et, comme $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ est positif, il y a bien minimum (n° 183).

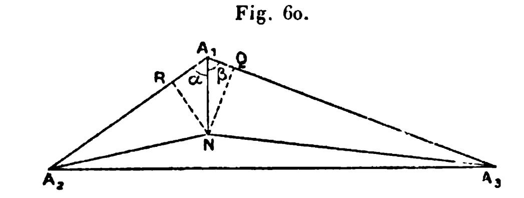
Si le point M, déterminé comme ci-dessus, n'est pas réel, c'est-à-dire si le triangle $A_1A_2A_3$ a un angle supérieur à 120°, il semble qu'il n'y ait jamais de minimum.

Cette conclusion serait fausse; on n'a pas trouvé de minimum (réel) en annulant $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$, mais il faut voir si le minimum ne correspondrait pas aux valeurs qui rendent $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ indéterminées. Or, d'après (3), ces deux dérivées deviennent indéterminées pour $x = a_i$, $y = b_i$, c'est-à-dire pour les sommets du triangle proposé; il est donc possible qu'un de ces sommets donne un minimum.

On peut, en effet, montrer géométriquement que si l'angle A_1, par exemple, est supérieur à 120°, le sommet A_1 correspond bien à un minimum.

Soit N (*fig.* 60) un point du plan, intérieur au triangle (on

Fig. 60.



verra que la démonstration s'applique à toutes les positions possibles de N); je dis que

$$NA_1 + NA_2 + NA_3 > A_1A_2 + A_1A_3.$$

Pour le voir, abaissons de N des perpendiculaires, NQ et NR,

sur les côtés de l'angle A_1 ; on a

$$NA_2 > A_2R, \qquad NA_3 > A_3Q,$$

et si j'établis que $NA_1 > A_1R + A_1Q$, la proposition sera évidemment démontrée. Or

$$A_1R = NA_1 \cos\alpha, \qquad A_1Q = NA_1 \cos\beta \qquad (\alpha + \beta > 120^\circ),$$

d'où

$$A_1R + A_1Q = 2\cos\frac{\alpha - \beta}{2}\cos\frac{\alpha + \beta}{2} NA_1.$$

Puisque $\alpha + \beta$ est compris entre 120° et 180°, $\cos\frac{\alpha + \beta}{2}$ est compris entre $\cos 60^\circ = \frac{1}{2}$ et $\cos 90^\circ = 0$; il est donc inférieur à $\frac{1}{2}$, et, comme $\cos\frac{\alpha - \beta}{2}$ est inférieur à 1, on a bien

$$A_1R + A_1Q < NA_1. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

DEUXIÈME PARTIE.

PRINCIPES DU CALCUL INTÉGRAL.

CHAPITRE I.

INTÉGRALES INDÉFINIES.

I. — PROCÉDÉS D'INTÉGRATION.

193. La première question que traite le Calcul intégral est la suivante :

Trouver les fonctions qui ont pour dérivée une fonction donnée $f(x)$.

Nous établirons dans le Chapitre suivant que, si $f(x)$ est continue entre $x = a$ et $x = b$, il existe une fonction $F(x)$ ayant pour dérivée $f(x)$, pour toutes les valeurs de x comprises dans cet intervalle; mais il n'y a *aucune méthode générale* pour trouver la fonction $F(x)$. De plus, si $f(x)$ est une combinaison de fonctions élémentaires (polynomes entiers, fonctions algébriques, fonctions circulaires et exponentielles, logarithmes, arc sin, etc.), $F(x)$ ne sera une fonction de même forme que dans des cas très particuliers, de sorte que le Calcul intégral conduit, dès le début, à des fonctions nouvelles.

Il y a une infinité de fonctions $F(x)$ ayant pour dérivée $f(x)$, car il est clair que $F(x) + C$ (C désignant une constante arbitraire) a la même dérivée que $F(x)$. Réciproquement, si $\Phi(x)$ et $F(x)$ ont même dérivée, $\Phi(x) - F(x)$, ayant une dérivée nulle, sera une constante (n° 19).

Les fonctions en nombre infini qui ont pour dérivée $f(x)$ se

nomment *fonctions primitives* de $f(x)$. On peut dire aussi qu'elles ont pour différentielle $f(x)\,dx$; on les appelle *intégrales* ou *intégrales indéfinies* de la différentielle $f(x)\,dx$, et on les représente par la notation

$$\int f(x)\,dx,$$

dont l'origine sera expliquée quand on traitera des intégrales définies.

On se sert également, pour désigner une intégrale $\int f(x)\,dx$, de l'expression de *quadrature;* une expression est dite *dépendre de* 1, 2, ... *quadratures* quand elle renferme 1, 2, ... signes d'intégration.

194. Les résultats obtenus dans la théorie des dérivées donnent immédiatement les intégrales de plusieurs différentielles simples; le Tableau suivant indique les principales de ces formules :

$$\left.\begin{aligned}\int (x-a)^m dx &= \frac{1}{(m+1)}(x-a)^{m+1}\\ \int \frac{dx}{(x-a)^m} &= -\frac{1}{m-1}\,\frac{1}{(x-a)^{m-1}}\end{aligned}\right\}\ \text{formules équivalentes,}$$

$$\int \frac{dx}{x-a} = \log \pm (x-a),$$

$$\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arc\,tang}\frac{x}{a},$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \operatorname{arc\,sin}\frac{x}{a},$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{h+x^2}} = \log(x+\sqrt{h+x^2}),$$

$$\int e^{mx}\,dx = \frac{1}{m}e^{mx},$$

$$\int \sin mx\,dx = -\frac{1}{m}\cos mx,$$

$$\int \cos mx\,dx = \frac{1}{m}\sin mx,$$

$$\int \operatorname{tang} mx\,dx = -\frac{1}{m}\log\cos mx,$$

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \log f(x).$$

195. On peut indiquer trois procédés à l'aide desquels on arrive quelquefois à intégrer une différentielle donnée.

1° **Décomposition en éléments simples.** — Si l'on a

$$f(x) = \varphi(x) + \psi(x) + \ldots + \chi(x),$$

il est clair que

$$\int f(x)\,dx = \int \varphi(x)\,dx + \int \psi(x)\,dx + \ldots + \int \chi(x)\,dx,$$

car la dérivée d'une somme est la somme des dérivées des termes.

Si l'on peut effectuer la décomposition de $f(x)$ en somme, de manière que les intégrales $\int \varphi(x)\,dx$, $\int \psi(x)\,dx$, ... soient connues, on saura donc intégrer $\int f(x)\,dx$.

Exemple : $\int \cos^2 x\,dx = \int \frac{1}{2}(1 + \cos 2x)\,dx = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin 2x.$

2° **Intégration par parties.** — On a, u et v étant fonctions de x,

$$(uv)'_x = uv' + vu',$$

d'où l'on déduit, en intégrant les deux membres,

$$uv = \int uv'\,dx + \int vu'\,dx$$

ou

$$\int uv'\,dx = uv - \int vu'\,dx.$$

On écrit aussi

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du.$$

Si donc on a à intégrer $f(x)\,dx$, on essaiera de mettre $f(x)$ sous la forme d'un produit de deux facteurs u et v', dont le second soit la dérivée d'une fonction connue, et l'on ramènera ainsi le calcul de $\int f(x)\,dx$ à celui de $\int vu'\,dx$, qui pourra être plus simple.

Exemple. — Soit à calculer $\int \operatorname{arc\,tang} x\, dx$; on écrira

$$\int \underbrace{\operatorname{arc\,tang} x}_{u}\, \underbrace{dx}_{dv} = x \operatorname{arc\,tang} x - \int \underbrace{x}_{v} \underbrace{\frac{dx}{1+x^2}}_{du}$$

$$= x \operatorname{arc\,tang} x - \frac{1}{2} \log(1+x^2).$$

Généralisation. — Si $u^{(k)}$ et $v^{(k)}$ sont les dérivées d'ordre k de u et v par rapport à x, on a, en intégrant par parties,

$$\int uv^{(n)}\, dx = uv^{(n-1)} - \int u' v^{(n-1)}\, dx,$$

$$\int u' v^{(n-1)}\, dx = u' v^{(n-2)} - \int u'' v^{(n-2)}\, dx, \qquad \ldots,$$

d'où, finalement,

$$\int uv^{(n)}\, dx = uv^{(n-1)} - u' v^{(n-2)} + u'' v^{(n-3)} - \ldots$$
$$+ (-1)^{n-1} u^{(n-1)} v + (-1)^n \int u^{(n)} v\, dx.$$

C'est la formule d'intégration par parties généralisée.

3° **Changement de variable.** — C'est le plus important des procédés d'intégration. Soit à calculer $I = \int f(x)\, dx$; posons

$$x = \varphi(t), \qquad \text{d'où} \qquad dx = \varphi'(t)\, dt.$$

Comme on a, *par définition*,

$$dI = f(x)\, dx,$$

on en déduit

$$dI = f[\varphi(t)]\, \varphi'(t)\, dt,$$

c'est-à-dire que la dérivée de I, par rapport à t, est $f[\varphi(t)]\varphi'(t)$. Donc

$$I = \int f[\varphi(t)] \varphi'(t)\, dt.$$

En d'autres termes, dans l'intégrale proposée, on remplace x et dx par leurs valeurs en fonction de t et de dt, et l'on est ramené à calculer une intégrale en t, qui peut être plus simple que l'ancienne. Si on peut la calculer, soit $I = F(t)$ son expression,

on obtiendra I, en fonction de x, en remplaçant t par sa valeur, tirée de $x = \varphi(t)$.

Exemple. — Dans $\int \arcsin x\, dx$, posons

$$\arcsin x = t \quad \text{ou} \quad x = \sin t, \quad dx = \cos t\, dt;$$

l'intégrale devient

$$\int t \cos t\, dt;$$

intégrons par parties, en regardant $\cos t$ comme la dérivée de $\sin t$:

$$\int t \cos t\, dt = t \sin t - \int \sin t\, dt = t \sin t + \cos t.$$

L'intégrale proposée s'obtient en remplaçant, dans cette expression, t par $\arcsin x$; $\sin t$ par x; $\cos t$ par $\sqrt{1 - x^2}$. Donc

$$\int \arcsin x\, dx = x \arcsin x + \sqrt{1 - x^2}.$$

196. On va maintenant appliquer les procédés précédents aux types de fonctions que l'on sait intégrer; ces types, en petit nombre, sont les suivants :

Fonctions algébriques.

1° *Fonctions rationnelles* (¹), $\frac{P(x)}{Q(x)}$ (P *et* Q *polynomes en* x).

2° *Fonctions rationnelles de* x *et de* $\sqrt[m]{\frac{ax + b}{cx + d}}$.

3° *Fonctions rationnelles de* x *et de* $\sqrt{ax^2 + 2bx + c}$.

(¹) On nomme *fonction rationnelle* de x le quotient de deux polynomes entiers en x; de même une fonction ou expression rationnelle en $x, y, z, \ldots$ est le quotient de deux polynomes entiers en $x, y, z, \ldots$.

On conçoit ainsi ce qu'on entend par *fonction rationnelle* de x et de $\sqrt{x}$; par exemple $\frac{x + \sqrt{x}}{1 - 2\sqrt{x} + x^2}$ est rationnel en x et $\sqrt{x}$, mais n'est pas rationnel par rapport à la variable x, puisque x y figure sous un radical.

De même l'expression $\frac{\sin x + \cos x}{\sin^3 x + 2}$ est rationnelle en $\sin x$ et $\cos x$, mais n'est pas fonction rationnelle de la variable x; de même, enfin, $\frac{\log^3 x}{x + \log^2 x}$ est rationnel en x et $\log x$, etc.

4° *Fonctions rationnelles de x et de y, lorsque y est lié à x par une équation $\varphi(x, y) = 0$ représentant une courbe unicursale.*

FONCTIONS TRANSCENDANTES.

1° *Fonctions rationnelles de* $\sin x$ *et* $\cos x$.

2° *Fonctions rationnelles de* e^{mx}.

3° *Polynomes entiers en* x, e^{ax}, e^{bx}, ..., $\sin\alpha x$, $\cos\alpha x$, $\sin\beta x$, $\cos\beta x$, ...

4° *Fonctions* $f(x, \log x)$; $f(x, \arcsin x)$, *où f est un polynome entier.*

II. — FONCTIONS ALGÉBRIQUES QUE L'ON SAIT INTÉGRER.

1° *Fonctions rationnelles de x.*

197. Pour trouver $\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx$, où P et Q sont des polynomes en x, on effectue ce qu'on nomme la décomposition *en éléments simples* de la fraction rationnelle $\frac{P(x)}{Q(x)}$.

198. Décomposition de $\frac{P(x)}{Q(x)}$ en éléments simples. — Si le degré du numérateur est au moins égal à celui du dénominateur, on commencera par faire la division de $P(x)$ par $Q(x)$, suivant les puissances décroissantes de x; on arrivera ainsi à un quotient $P_1(x)$ et à un reste $R(x)$, tels qu'on ait identiquement

$$P(x) = P_1(x) Q(x) + R(x),$$

$R(x)$ étant de degré inférieur à $Q(x)$. Donc

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = P_1(x) + \frac{R(x)}{Q(x)},$$

et

$$\int \frac{P}{Q} dx = \int P_1 dx + \int \frac{R}{Q} dx.$$

$P_1(x)$ étant un polynome, $\int P_1(x) dx$ s'obtient de suite, et l'on

est ramené à intégrer une fraction rationnelle $\frac{R}{Q}(x)$, où le degré du numérateur est inférieur à celui du dénominateur.

On s'appuiera pour cela sur le lemme suivant.

LEMME. — *Une fraction rationnelle de x, $\frac{N(x)}{D(x)}$, qui ne devient infinie pour aucune valeur, finie ou infinie, réelle ou imaginaire de x, est une constante.*

Décomposons, en effet, le dénominateur en facteurs $(x-a)^\alpha$, $(x-b)^\beta, \ldots$; si la fraction ne devient pas infinie pour $x=a$, c'est que le numérateur $N(x)$ contient $(x-a)^\alpha$ en facteur, etc.; $N(x)$ est donc divisible par le dénominateur $D(x)$, de sorte que

$$\frac{N(x)}{D(x)} = M(x),$$

$M(x)$ étant un polynome entier en x. Mais comme $\frac{N(x)}{D(x)}$, c'est-à-dire le polynome $M(x)$, ne devient pas infini pour $x=\infty$, par hypothèse, ce polynome se réduit à une constante.

C. Q. F. D.

Soient maintenant $a, b, \ldots, l$ les racines du polynome $Q(x)$; $\alpha, \beta, \ldots, \lambda$ leurs ordres de multiplicité. On peut supposer qu'aucune d'elles n'annule $R(x)$; car si Q et R avaient un facteur commun $(x-a)^p$, on le supprimerait au numérateur et au dénominateur.

Cela posé, considérons la racine a, et faisons pour un instant $x=a+h$ dans la fonction $\frac{R(x)}{Q(x)}$. Elle devient $\frac{R(a+h)}{Q(a+h)}$, et son dénominateur contient h^α en facteur, puisque a est racine d'ordre α de $Q(x)$.

Développons $\frac{R(a+h)}{Q(a+h)}$ par la division suivant les puissances croissantes de h, en ne conservant que la partie infinie du développement (n° 173), c'est-à-dire en calculant jusqu'au terme en $\frac{1}{h}$ inclus; il vient

$$\frac{R(a+h)}{Q(a+h)} = \frac{A_\alpha}{h^\alpha} + \frac{A_{\alpha-1}}{h^{\alpha-1}} + \ldots + \frac{A_1}{h}\Bigg| + \text{ expression (}^1\text{) restant finie pour } h=0;$$

(¹) Cette expression est une fraction rationnelle en h, puisque c'est la différence de la fraction $\frac{R(a+h)}{Q(a+h)}$ et de l'expression rationnelle $\frac{A_\alpha}{h^\alpha}+\ldots+\frac{A_1}{h}$.

ou, en revenant de h à x,

$$(1)\quad \frac{R(x)}{Q(x)} = \frac{A_\alpha}{(x-a)^\alpha} + \frac{A_{\alpha-1}}{(x-a)^{\alpha-1}} + \ldots + \frac{A_1}{x-a} \Bigg| + \text{fonction rationnelle finie pour } x = a.$$

Opérons de même pour les autres racines $b, c, \ldots$ de $Q(x)$, et considérons la somme de toutes les parties infinies trouvées, à savoir la fonction de x :

$$(2)\quad \left\{ \begin{aligned} F(x) = {} & \frac{A_\alpha}{(x-a)^\alpha} + \frac{A_{\alpha-1}}{(x-a)^{\alpha-1}} + \ldots + \frac{A_1}{x-a} \\ & + \frac{B_\beta}{(x-b)^\beta} + \ldots\ldots\ldots\ldots + \frac{B_1}{x-b} \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & + \frac{L_\lambda}{(x-l)^\lambda} + \ldots\ldots\ldots\ldots + \frac{L_1}{x-l}. \end{aligned} \right.$$

Je dis que $F(x)$ est identique à la fraction rationnelle proposée, $\frac{R(x)}{Q(x)}$. En effet, la différence $F(x) - \frac{R(x)}{Q(x)}$ ne devient pas infinie d'après (1) et (2) pour $x = a$, puisque les parties infinies se détruisent; de même pour $x = b, \ldots, l$. Elle ne devient pas non plus infinie pour $x = \infty$, car $F(\infty)$ est évidemment nul, et $\frac{R}{Q}(\infty)$ est nul aussi, puisque le degré de R est inférieur à celui de Q. Donc, en vertu du lemme, la différence $F(x) - \frac{R(x)}{Q(x)}$, ne devenant infinie pour aucune valeur de x, et étant évidemment une fraction rationnelle en x, est une constante; cette constante est nulle, puisque, pour la valeur particulière $x = \infty$, F et $\frac{R}{Q}$ sont nuls.

Il en résulte donc bien que $\frac{R(x)}{Q(x)}$ est identique à $F(x)$, c'est-à-dire est donné par le second membre de (2); on a ainsi décomposé $\frac{R(x)}{Q(x)}$ en *fractions simples*, de la forme $\frac{A}{(x-a)^m}$.

Voici donc le résultat.

199. **Résumé.** — Soient $a, b, \ldots$ les racines du polynome $Q(x)$; $\alpha, \beta, \ldots$ leurs ordres de multiplicité; la fraction rationnelle $\frac{R(x)}{Q(x)}$, où le numérateur a son degré inférieur au degré du dénomina-

teur, peut se mettre sous la forme

$$\frac{R(x)}{Q(x)} = \frac{A_\alpha}{(x-a)^\alpha} + \frac{A_{\alpha-1}}{(x-a)^{\alpha-1}} + \ldots + \frac{A_1}{x-a}$$
$$+ \frac{B_\beta}{(x-b)^\beta} + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Pour calculer les A, on pose $x = a+h$ et l'on effectue le développement de $\frac{R(a+h)}{Q(a+h)}$ suivant les puissances croissantes de h, en se bornant à la partie infinie. A cet effet, on développe $R(a+h)$ et $Q(a+h)$ en ordonnant ces polynomes suivant les puissances croissantes de h,

$$R(a+h) = \lambda_0 + \lambda_1 h + \lambda_2 h^2 + \ldots \qquad (\lambda_0 \gtrless 0, \text{ car } R(a) \gtrless 0),$$
$$Q(a+h) = \quad h^\alpha(\mu_0 + \mu_1 h \quad + \ldots);$$

ce qui donne

$$\frac{R(a+h)}{Q(a+h)} = \frac{1}{h^\alpha}\,\frac{\lambda_0 + \lambda_1 h + \lambda_2 h^2 + \ldots}{\mu_0 + \mu_1 h + \mu_2 h^2 + \ldots};$$

on effectue ensuite la division de $\lambda_0 + \lambda_1 h + \ldots$ par $\mu_0 + \mu_1 h + \ldots$, suivant les puissances croissantes de h, en s'arrêtant dans le quotient au terme en $h^{\alpha-1}$, d'où

$$\frac{R(a+h)}{Q(a+h)} = \frac{a_\alpha + a_{\alpha-1} h + \ldots + a_1 h^{\alpha-1} + \ldots}{h^\alpha}$$
$$= \frac{a_\alpha}{h^\alpha} + \frac{a_{\alpha-1}}{h^{\alpha-1}} + \ldots + \frac{a_1}{h} + \ldots,$$

et $a_\alpha, a_{\alpha-1}, \ldots, a_1$ sont les coefficients cherchés $A_\alpha, A_{\alpha-1}, \ldots, A_1$. C'est le calcul déjà rencontré au n° 173.

On calcule de même $B_\beta, B_{\beta-1}, \ldots$.

200. Remarques. — 1° Si a est racine simple ($\alpha = 1$), il n'y a qu'un seul coefficient $A_\alpha (= A_1)$; *sa valeur doit être retenue*. On a

$$R(a+h) = R(a) + hR'(a) + \ldots,$$
$$Q(a+h) = h\left[Q'(a) + \frac{h}{2}Q''(a) + \ldots\right],$$

car $Q(a)=0$; d'où

$$\frac{R(a+h)}{Q(a+h)}=\frac{1}{h}\,\frac{R(a)+\ldots}{Q'(a)+\ldots}.$$

Le premier terme de la division de $R(a)+\ldots$ par $Q'(a)+\ldots$ est évidemment $\frac{R(a)}{Q'(a)}$. Donc

$$A_1=\frac{R(a)}{Q'(a)}.$$

2° Il est inutile de calculer, dans $R(a+h)$ et dans $Q(a+h)$, les coefficients de *toutes* les puissances de h. En effet, dans l'expression ci-dessus

$$\frac{1}{h^\alpha}\left[\frac{\lambda_0+\lambda_1 h+\ldots}{\mu_0+\mu_1 h+\ldots}\right],$$

le quotient des deux polynomes entre crochets ne doit être poussé que jusqu'au terme en $h^{\alpha-1}$; donc (n° 173), il suffit que ces deux polynomes soient développés jusqu'aux termes en $h^{\alpha-1}$ inclus; c'est-à-dire que, *pour une racine a, d'ordre α, il suffira de prendre les α premiers termes* dans $R(a+h)$ et dans $Q(a+h)$.

Par exemple, pour une racine double ($\alpha=2$), il suffira de prendre

$$\frac{R(a)+hR'(a)}{h^2\left[\frac{Q''(a)}{2}+h\frac{Q'''(a)}{6}\right]}.$$

201. Intégration. — La décomposition une fois effectuée, l'intégration est immédiate. Si

$$\frac{R(x)}{Q(x)}=\frac{A_\alpha}{(x-a)^\alpha}+\ldots+\frac{A_1}{x-a}+\frac{B_\beta}{(x-b)^\beta}+\ldots+\frac{B_1}{x-b}+\ldots,$$

on aura

$$\begin{aligned}\int\frac{R(x)}{Q(x)}dx=&-\frac{1}{\alpha-1}\,\frac{A_\alpha}{(x-a)^{\alpha-1}}-\ldots-\frac{A_2}{(x-a)}+A_1\log(x-a)\\&-\frac{1}{\beta-1}\,\frac{B_\beta}{(x-b)^{\beta-1}}-\ldots-\frac{B_2}{(x-b)}+B_1\log(x-b)\\&+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots+\text{const.}\end{aligned}$$

L'intégrale se compose donc d'une partie transcendante,

$$A_1 \log(x-a) + B_1 \log(x-b) + \ldots,$$

et d'une partie rationnelle,

$$-\frac{1}{\alpha-1}\frac{A_\alpha}{(x-a)^{\alpha-1}} + \ldots - \frac{A_2}{x-a} - \frac{1}{\beta-1}\frac{B_\beta}{(x-b)^{\beta-1}} - \ldots,$$

qui se présente sous forme d'une somme de fractions simples.

202. Cas des racines imaginaires. — La méthode des nos 199 à 201 ne suppose nullement les racines réelles; toutefois, dans le cas des racines imaginaires, au moment de faire l'intégration il est utile de prendre une précaution, afin de ne pas trouver des logarithmes portant sur des quantités imaginaires.

Soient $a = \lambda + \mu i$ une racine imaginaire, et $b = \lambda - \mu i$ la racine conjuguée; elles sont de même ordre, c'est-à-dire que $\alpha = \beta$, et A_α, $A_{\alpha-1}$, ..., A_1 sont respectivement conjugués de B_α, $B_{\alpha-1}$, ..., B_1, si $R(x)$ et $Q(x)$ ont leurs coefficients réels.

On aura, comme plus haut,

$$\frac{R(x)}{Q(x)} = \frac{A_\alpha}{(x-a)^\alpha} + \ldots + \frac{A_1}{x-a} + \frac{B_\alpha}{(x-b)^\alpha} + \ldots + \frac{B_1}{x-b} + \ldots.$$

La précaution à prendre est de réunir les deux derniers termes, $\frac{A_1}{x-a}$ et $\frac{B_1}{x-b}$, *avant* d'intégrer; on écrira donc

$$\frac{A_1}{x-a} + \frac{B_1}{x-b} = \frac{p+qi}{x-\lambda-\mu i} + \frac{p-qi}{x-\lambda+\mu i} = \frac{rx+s}{(x-\lambda)^2+\mu^2},$$

r et s étant réels, et l'on intégrera comme il suit :

$$\int \frac{rx+s}{(x-\lambda)^2+\mu^2}dx = \int \frac{r(x-\lambda)+s+r\lambda}{(x-\lambda)^2+\mu^2}dx$$
$$= \frac{r}{2}\int \frac{2(x-\lambda)}{(x-\lambda)^2+\mu^2}dx + (s+r\lambda)\int \frac{dx}{(x-\lambda)^2+\mu^2}.$$

Au second membre, la première intégrale est évidemment

$$\frac{r}{2}\log[(x-\lambda)^2+\mu^2],$$

puisque le numérateur est la dérivée du dénominateur; pour cal-

culer la seconde, posons-y

$$\frac{x-\lambda}{\mu} = t,$$

d'où

$$dx = \mu\, dt.$$

Elle devient

$$(s + r\lambda)\int \frac{\mu\, dt}{\mu^2(1+t^2)} = \frac{s+r\lambda}{\mu} \operatorname{arc\,tang} t.$$

Donc, enfin,

$$\int \frac{rx+s}{(x-\lambda)^2+\mu^2}\, dx = \frac{r}{2}\log[(x-\lambda)^2+\mu^2] + \frac{s+r\lambda}{\mu} \operatorname{arc\,tang} \frac{x-\lambda}{\mu}.$$

Quant aux termes $\frac{A_\alpha}{(x-a)^\alpha}$, $\frac{B_\alpha}{(x-b)^\alpha}$, on les intégrera directement; la somme des deux intégrales correspondantes sera évidemment réelle.

203. Remarque. — Dans le cas des racines imaginaires conjuguées, $\lambda + \mu i$, $\lambda - \mu i$, d'ordre α, on peut aussi mettre les termes qui correspondent à ces deux racines, dans la décomposition de $\frac{R(x)}{Q(x)}$ en fractions simples, sous la forme

$$\frac{p_\alpha x + q_\alpha}{[(x-\lambda)^2+\mu^2]^\alpha} + \ldots + \frac{p_1 x + q_1}{(x-\lambda)^2+\mu^2}.$$

Supposons, en effet, que $Q(x)$ contienne le facteur $(x-\lambda)^2+\mu^2$ à la puissance α, de sorte que

$$Q(x) = Q_1(x)[(x-\lambda)^2+\mu^2]^\alpha,$$

et considérons la différence (où p_α et q_α sont des constantes)

$$\frac{R(x)}{Q(x)} - \frac{p_\alpha x + q_\alpha}{[(x-\lambda)^2+\mu^2]^\alpha},$$

qui s'écrit

$$\frac{R(x) - Q_1(x)(p_\alpha x + q_\alpha)}{Q_1(x)[(x-\lambda)^2+\mu^2]^\alpha}.$$

On peut déterminer p_α et q_α de manière que le numérateur contienne en facteur $(x-\lambda)^2+\mu^2$, c'est-à-dire s'annule pour $x = \lambda + \mu i$ et $x = \lambda - \mu i$, et les valeurs obtenues pour p_α et q_α sont *réelles*, comme on le reconnaît de suite en les explicitant. Elles sont, de plus, *finies*. Alors, la différence considérée devient une fraction rationnelle où $(x-\lambda)^2+\mu^2$ ne figure plus au

dénominateur qu'à la puissance $\alpha - 1$, de sorte que

$$\frac{R(x)}{Q(x)} = \frac{p_\alpha x + q_\alpha}{[(x-\lambda)^2 + \mu^2]^\alpha} + \frac{R_1(x)}{Q_1(x)[(x-\lambda)^2+\mu^2]^{\alpha-1}},$$

le numérateur $R_1(x)$ de la dernière fraction ayant son degré inférieur au degré du dénominateur ([1]).

En appliquant le même procédé au second terme du second membre, et ainsi de suite, on arrive à la formule voulue.

204. Si l'on a opéré la décomposition par ce procédé, on aura à intégrer des expressions de la forme

$$\int \frac{px+q}{[(x-\lambda)^2+\mu^2]^\alpha}\,dx,$$

ce qu'on fera directement.

On posera d'abord, pour simplifier, $\frac{x-\lambda}{\mu} = t$; l'intégrale deviendra

$$\int \frac{p\mu t + p\lambda + q}{\mu^{2\alpha}(1+t^2)^\alpha}\,\mu\,dt = \frac{p}{\mu^{2\alpha-2}}\int\frac{t\,dt}{(t^2+1)^\alpha} + \frac{p\lambda+q}{\mu^{2\alpha-1}}\int\frac{dt}{(1+t^2)^\alpha}.$$

Au second membre, l'intégrale $\int\frac{t\,dt}{(1+t^2)^\alpha}$ est évidemment ($\alpha \gtrless 1$) égale à $-\frac{1}{2(\alpha-1)}\frac{1}{(1+t^2)^{\alpha-1}}$; il reste donc à calculer l'intégrale

$$I_\alpha = \int\frac{dt}{(1+t^2)^\alpha}.$$

On l'écrira

$$I_\alpha = \int\frac{1+t^2-t^2}{(1+t^2)^\alpha}\,dt = \int\frac{dt}{(1+t^2)^{\alpha-1}} - \int\frac{t^2\,dt}{(1+t^2)^\alpha} = I_{\alpha-1} - \int\frac{t^2\,dt}{(1+t^2)^\alpha}.$$

Appliquons à la dernière intégrale le procédé d'intégration par parties :

$$\int \underbrace{t}_{u}\,\underbrace{\frac{t\,dt}{(1+t^2)^\alpha}}_{dv} = t\underbrace{\left[-\frac{1}{2(\alpha-1)}\frac{1}{(1+t^2)^{\alpha-1}}\right]}_{v} + \int\frac{1}{2(\alpha-1)}\frac{dt}{(1+t^2)^{\alpha-1}}$$

$$= \frac{-1}{2\alpha-2}\frac{t}{(1+t^2)^{\alpha-1}} + \frac{1}{2\alpha-2}I_{\alpha-1}.$$

([1]) Car pour $x = \infty$, le premier membre s'annule, ainsi que la première fraction du second membre : il en est donc de même de la deuxième fraction.

C. Q. F. D.

D'où

$$I_\alpha = I_{\alpha-1} + \frac{1}{2\alpha-2}\frac{t}{(1+t^2)^{\alpha-1}} - \frac{1}{2\alpha-2}I_{\alpha-1},$$

$$I_\alpha = \frac{1}{2\alpha-2}\frac{t}{(1+t^2)^{\alpha-1}} + \frac{2\alpha-3}{2\alpha-2}I_{\alpha-1},$$

formule de récurrence qui permet de ramener, par échelons successifs, le calcul de I_α à celui de I_1; or on a

$$I_1 = \int \frac{dt}{1+t^2} = \operatorname{arc\,tang} t.$$

La question est donc résolue.

Exemples d'intégration de fonctions rationnelles.

205. 1° Soit d'abord l'intégrale

$$\int \frac{dx}{x^2-1},$$

qui se rencontre fréquemment. On a

$$\frac{1}{x^2-1} = \frac{1}{2(x-1)} - \frac{1}{2(x+1)},$$

d'où

$$\int \frac{dx}{x^2-1} = \frac{1}{2}\log(x-1) - \frac{1}{2}\log(x+1) = \frac{1}{2}\log\frac{x-1}{x+1}.$$

2° Soit en second lieu l'intégrale

$$I = \int \frac{x^6}{(x^2-1)^3}\,dx.$$

Le numérateur est de même degré que le dénominateur; le quotient est 1; on écrira donc

$$x^6 = (x^2-1)^3 + 3x^4 - 3x^2 + 1,$$

d'où

$$I = \int dx + \int \frac{3x^4-3x^2+1}{(x^2-1)^3}\,dx.$$

Il faut décomposer en fractions simples $\frac{3x^4-3x^2+1}{(x^2-1)^3}$; les racines du dénominateur sont $+1$ et -1; elles sont triples. Écrivons :

$$\frac{3x^4-3x^2+1}{(x^2-1)^3} = \frac{A_3}{(x-1)^3} + \frac{A_2}{(x-1)^2} + \frac{A_1}{x-1} + \ldots$$

Pour calculer les A, posons $x = 1 + h$; le premier membre devient

$$\frac{3(1+h)^4 - 3(1+h)^2 + 1}{h^3(2+h)^3} = \frac{1 + 6h + 15h^2 + \ldots}{h^3(8 + 12h + 6h^2 + \ldots)},$$

car la racine étant *triple*, on n'a besoin que des *trois* premiers termes en h au numérateur et au dénominateur (n° **200**, 2°). Faisons la division, suivant les puissances croissantes de h :

$$\begin{array}{r|l}
1 + 6h + 15h^2 & 8 + 12h + 6h^2 \\ \cline{2-2}
-\frac{12}{8}h - \frac{6}{8}h^2 & \frac{1}{8} + \frac{9}{16}h + \frac{30}{32}h^2 \\ \cline{1-1}
+\frac{9}{2}h + \frac{57}{4}h^2 & \\
-\frac{27}{4}h^2 & \\ \cline{1-1}
+\frac{30}{4}h^2 &
\end{array}$$

Donc

$$A_3 = \frac{1}{8}, \qquad A_2 = \frac{9}{16}, \qquad A_1 = \frac{15}{16}.$$

On calculerait de même les coefficients qui correspondent à la racine -1. Il est plus simple de les obtenir directement; on a

$$\frac{3x^4 - 3x^2 + 1}{(x^2-1)^3} = \frac{1}{8}\frac{1}{(x-1)^3} + \frac{9}{16}\frac{1}{(x-1)^2} + \frac{15}{16}\frac{1}{x-1} + \frac{B_3}{(x+1)^3} + \frac{B_2}{(x+1)^2} + \frac{B_1}{x+1}.$$

Changeons x en $-x$, le premier membre ne change pas; pour que le second membre reste aussi le même, il faut évidemment que

$$B_3 = -\frac{1}{8}, \qquad B_2 = \frac{9}{16}, \qquad B_1 = -\frac{15}{16}.$$

Donc enfin,

$$I = x - \frac{1}{16}\frac{1}{(x-1)^2} - \frac{9}{16}\frac{1}{(x-1)} + \frac{15}{16}\log(x-1) + \frac{1}{16}\frac{1}{(x+1)^2} - \frac{9}{16}\frac{1}{(x+1)} - \frac{15}{16}\log(x+1).$$

206. Cas particuliers. — Dans certains cas, l'application de la méthode générale peut être notablement simplifiée.

Exemple I. — Soit à calculer $\int f(x)\,dx$, $f(x)$ étant une fraction rationnelle en x, *impaire*, c'est-à-dire changeant de signe avec x. Alors $\frac{1}{x}f(x)$ sera une fonction paire et dépendra, par suite, rationnellement de x^2, de sorte que

$$f(x) = x\,\varphi(x^2),$$

$\varphi(x)$ étant rationnel. Pour intégrer, on posera

$$x^2 = t,$$

d'où

$$\int f(x)\,dx = \int \varphi(x^2)x\,dx = \frac{1}{2}\int \varphi(t)\,dt,$$

ce qui simplifiera les calculs ultérieurs, car la fraction rationnelle $\varphi(t)$, à décomposer en éléments simples, a ses deux termes respectivement de degré moindre que les termes de $f(x)$.

Calculons ainsi l'intégrale $J = \int \frac{dx}{x(x^2+1)^2}$; on a, en posant $x^2 = t$,

$$J = \int \frac{x\,dx}{x^2(x^2+1)^2} = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t(t+1)^2}.$$

La décomposition en éléments simples donne :

$$\frac{1}{t(t+1)^2} = \frac{1}{t} - \frac{1}{(t+1)^2} - \frac{1}{t+1},$$

d'où

$$J = \frac{1}{2}\log t + \frac{1}{2}\,\frac{1}{t+1} - \frac{1}{2}\log(t+1) = \frac{1}{2}\log\frac{x^2}{x^2+1} + \frac{1}{2}\,\frac{1}{x^2+1}.$$

Exemple II. — Plus généralement, soit à calculer $\int \frac{dx}{x}\varphi(x^m)$, φ étant une fonction rationnelle de x^m (il n'est pas même nécessaire que m soit entier). On écrit l'intégrale

$$\int \frac{x^{m-1}\,dx}{x^m}\varphi(x^m);$$

si l'on pose $x^m = t$, $x^{m-1}\,dx = \frac{1}{m}dt$, elle devient

$$\frac{1}{m}\int \frac{\varphi(t)}{t}\,dt,$$

et l'on est ramené à intégrer une fraction rationnelle en t.

Ainsi :

$$\int \frac{dx}{x(a+bx^m)} = \frac{1}{m}\int \frac{dt}{t(a+bt)} = \frac{1}{ma}\int dt\left(\frac{1}{t} - \frac{b}{a+bt}\right).$$

Exemple III. — Supposons qu'il n'y ait au dénominateur de la fraction rationnelle à intégrer qu'un seul facteur :

$$I = \int \frac{P(x)\,dx}{(x-a)^m},$$

$P(x)$ étant un polynome entier de degré k. La décomposition en éléments simples sera immédiate si l'on pose $x - a = t$, $dx = dt$; on a ainsi

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{P(t+a)\,dt}{t^m} = \int dt\left(\frac{A_0 + A_1 t + \ldots + A_k t^k}{t^m}\right) \\ &= A_0\int \frac{dt}{t^m} + A_1\int \frac{dt}{t^{m-1}} + \ldots + A_k\int t^{k-m}\,dt, \end{aligned}$$

et les quadratures s'effectuent de suite.

207. Une méthode de réduction analogue à celle du n° **204** permet de simplifier le calcul des intégrales

$$\int \frac{x^k\,dx}{(x^2 \pm 1)^n}.$$

Si k est impair, la fonction à intégrer est impaire; on posera $t = x^2$, ce qui permettra le calcul presque immédiat de l'intégrale, ramenée ainsi au cas du troisième exemple ci-dessus.

Si k est pair, on opérera ainsi. Soit, par exemple, l'intégrale déjà obtenue

$$I = \int \frac{x^6}{(x^2-1)^3}\,dx;$$

on écrira

$$I = \int \overbrace{\frac{x\,dx}{(x^2-1)^3}}^{dv}\,\overbrace{x^5}^{u} = -\overbrace{\frac{1}{4}\,\frac{1}{(x^2-1)^2}}^{v}\,x^5 + \frac{5}{4}\int \frac{x^4\,dx}{(x^2-1)^2};$$

de même

$$\int \overbrace{\frac{x\,dx}{(x^2-1)^2}}^{dv}\,\overbrace{x^3}^{u} = -\frac{1}{2}\,\frac{x^3}{(x^2-1)} + \frac{3}{2}\int \frac{x^2\,dx}{x^2-1};$$

or

$$\int \frac{x^2\,dx}{x^2-1} = \int dx\left(1+\frac{1}{x^2-1}\right)$$
$$= \int dx\left(1+\frac{1}{2}\,\frac{1}{x-1}-\frac{1}{2}\,\frac{1}{x+1}\right) = x+\frac{1}{2}\log\frac{x-1}{x+1}.$$

En remontant la série des calculs, on trouve

$$I = -\frac{1}{4}\,\frac{x^5}{(x^2-1)^2}+\frac{5}{4}\left(-\frac{1}{2}\,\frac{x^3}{x^2-1}+\frac{3}{2}x+\frac{3}{4}\log\frac{x-1}{x+1}\right).$$

208. *Autre méthode.* — On peut encore simplifier le calcul des intégrales du type

$$\int \frac{P(x)}{(x^2-1)^n}\,dx$$

par le changement de variable

$$x = \frac{z+1}{z-1}, \qquad dx = -2\frac{dz}{(z-1)^2}, \qquad x^2-1 = \frac{4z}{(z-1)^2}.$$

Cette méthode est très rapide lorsque le degré du polynome $P(x)$ ne dépasse pas $2n-2$, car l'intégrale proposée devient

$$-\frac{1}{2^{2n-1}}\int P\left(\frac{z+1}{z-1}\right)(z-1)^{2n-2}\frac{dz}{z^n}.$$

En vertu de l'hypothèse faite sur le degré de $P(x)$, l'expression $P\left(\frac{z+1}{z-1}\right)(z-1)^{2n-2}$ est un polynome entier en z, et l'intégrale précédente se calcule immédiatement (n° **206**, troisième exemple).

2° *Fonctions rationnelles de x et de $\sqrt[m]{\frac{ax+b}{cx+d}}$.*

209. Les intégrales du type

$$(1) \qquad \int f\left[x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{p}{q}}, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{p'}{q'}}, \ldots, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{p''}{q''}}\right]dx,$$

où $p, q, \ldots, p'', q''$ sont des entiers, positifs ou négatifs, et où f est une fonction rationnelle, se ramènent aux intégrales de différentielles rationnelles d'une variable et sont, dès lors, calculables par les fonctions élémentaires.

Soit, en effet, m le plus petit commun multiple (en valeur absolue) des dénominateurs $q, q', \ldots, q''$; on posera

$$\frac{ax+b}{cx+d} = t^m,$$

d'où

$$x = \frac{dt^m - b}{a - ct^m}, \qquad dx = m\,\frac{ad-bc}{(a-ct^m)^2}\,t^{m-1}\,dt,$$

et l'intégrale (1) prend la forme

$$m(ad-bc)\int f\left(\frac{dt^m-b}{a-ct^m},\ t^{\frac{mp}{q}},\ \ldots,\ t^{\frac{mp''}{q''}}\right)\frac{t^{m-1}}{(a-ct^m)^2}\,dt,$$

où tout est rationnel, puisque $m, \frac{mp}{q}, \ldots, \frac{mp''}{q''}$ sont entiers.

210. Exemples. — 1° Dans ce type rentrent les intégrales très fréquentes $\int f(x, \sqrt{ax+b})\,dx$, $\int f\left(x, \sqrt{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)dx$, qu'on ramène aux intégrales de fonctions rationnelles en posant respectivement

$$ax+b = t^2, \qquad \frac{ax+b}{cx+d} = t^2.$$

Ainsi, dans

$$\mathrm{I} = \int\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}\,dx,$$

on posera

$$\frac{x+1}{x-1} = t^2, \qquad \text{ou} \qquad x = \frac{t^2+1}{t^2-1}, \qquad dx = \frac{-4\,t\,dt}{(t^2-1)^2}.$$

$$\mathrm{I} = \int t\,\frac{-4\,t\,dt}{(t^2-1)^2} = -4\int\frac{t^2\,dt}{(t^2-1)^2},$$

intégrale qu'on traitera comme au n° 207 ou au n° 208.

2° Soit $\int\frac{x - x^{\frac{1}{2}}}{x - x^{\frac{2}{3}}}\,dx$; on a à intégrer une fonction rationnelle de x et de $x^{\frac{1}{6}}$; on posera donc

$$x = t^6, \qquad dx = 6t^5\,dt,$$

et l'on sera ramené à calculer

$$6\int\frac{t^6-t^3}{t^6-t^4}\,t^5\,dt = 6\int t^4\,\frac{t^3-1}{t^2-1}\,dt = 6\int t^4\,\frac{t^2+t+1}{t+1}\,dt.$$

3° Soit encore

$$\int \frac{dx}{x+\sqrt{x+1}}.$$

On pose $x+1=t^2$, et l'intégrale devient

$$2\int \frac{t\,dt}{t^2+t-1},$$

ce qui se calcule sans difficulté par la décomposition en fractions simples.

211. Différentielle binome. — C'est la différentielle

$$x^m(a+bx^n)^p dx \qquad (a, b \gtrless 0),$$

où m, n, p sont des nombres *fractionnaires,* positifs ou négatifs. En général, on ne sait pas l'intégrer, mais on peut la ramener au type précédent, et par suite l'intégrer, dans trois cas particuliers. Posons

$$x^n = t, \qquad x = t^{\frac{1}{n}}, \qquad dx = \frac{1}{n} t^{\frac{1}{n}-1} dt;$$

l'intégrale de la différentielle binome devient

$$\frac{1}{n}\int t^{\frac{m+1}{n}-1}(a+bt)^p dt.$$

Elle est du type (1) :

1° *Si p est entier,* car on a sous le signe $\int$ le produit d'une fonction rationnelle, $(a+bt)^p$, par une puissance fractionnaire de t; si $\frac{m+1}{n}=\frac{r}{s}$, r et s étant entiers, on intégrera en posant $t^{\frac{1}{s}}=z$;

2° *Si $\frac{m+1}{n}$ est entier,* car on a le produit d'une fonction rationnelle, $t^{\frac{m+1}{n}-1}$, par une puissance fractionnaire de $a+bt$; on intégrera, si $p=\frac{r}{s}$, r et s étant entiers, en posant $(a+bt)^{\frac{1}{s}}=z$;

3° *Si $\frac{m+1}{n}+p$ est entier,* car on peut écrire la quantité à

intégrer $t^{\frac{m+1}{n}+p-1}\left(\frac{a+bt}{t}\right)^p$, ce qui est le produit d'une fonction rationnelle par une puissance fractionnaire de $\frac{a+bt}{t}$; si $p=\frac{r}{s}$, on intégrera en posant $\left(\frac{a+bt}{t}\right)^{\frac{1}{s}}=z$.

3° *Fonctions rationnelles de x et de $\sqrt{ax^2+2bx+c}$.*

212. Soit à calculer l'intégrale

$$\int f(x,y)\,dx, \tag{2}$$

où f est une fonction rationnelle de x, y, et où y représente le radical

$$y=\sqrt{ax^2+2bx+c}.$$

Je dis qu'on peut la ramener à l'intégrale d'une fonction rationnelle par un changement de variable; il suffirait, pour cela, qu'on pût exprimer x et y en fonction rationnelle d'un paramètre t,

$$x=\varphi(t),\qquad y=\psi(t);$$

on aurait alors $dx=\varphi' dt$, $\varphi'(t)$ étant aussi rationnel, et il est clair que l'intégrale (2) se ramènerait à la forme $\int F(t)\,dt$, F étant rationnel en t.

Tout revient donc à exprimer rationnellement x et y, si c'est possible, en fonction d'un paramètre t. Or la courbe

$$y=\sqrt{ax^2+2bx+c}$$

représentant une conique, l'expression est possible, car il suffit, comme on sait, de couper la conique par une sécante mobile, de coefficient angulaire t, passant par un point fixe pris sur la courbe, pour obtenir x et y en fonction rationnelle de t.

213. On saura donc intégrer les expressions du type (2); dans chaque cas particulier, on choisira le point fixe de manière à simplifier les expressions de x, y en fonction de t. Par exemple :

1° Si le polynome $ax^2+2bx+c=0$ a ses racines réelles,

α et β, on pourra prendre pour point fixe le point $y=0$, $x=\alpha$, situé sur Ox. On posera donc

$$y = t(x-\alpha);$$

et cette sécante mobile coupera la courbe $y^2 = a(x-\alpha)(x-\beta)$ aux points dont les x vérifient l'équation

$$t^2(x-\alpha)^2 = a(x-\alpha)(x-\beta).$$

En supprimant le facteur $(x-\alpha)$, qui correspond au point fixe, on trouve

$$\frac{x-\beta}{x-\alpha} = \frac{t^2}{a},$$

d'où l'on conclut :

$$x = \frac{\beta - \frac{\alpha}{a}t^2}{1-\frac{1}{a}t^2}, \qquad y = t(x-\alpha) = t\frac{\beta-\alpha}{1-\frac{1}{a}t^2},$$

expressions cherchées de x et y en fonction de t.

Il est clair qu'on peut remplacer, sans changer la forme rationnelle, $\frac{t}{\sqrt{\pm a}}$ par θ, c'est-à-dire que l'intégrale proposée (2) devient celle d'une fonction rationnelle de θ par la substitution

$$\frac{x-\beta}{x-\alpha} = \pm\theta^2,$$

où α et β désignent les racines du trinome sous le radical (¹), $ax^2+2bx+c$.

2° On pourra prendre pour point fixe un des points où la courbe coupe l'axe des y :

$$x=0, \qquad y=\sqrt{c};$$

(¹) Cela revient à un procédé indiqué au n° 210. Car le radical $\sqrt{ax^2+2bx+c}$ pouvant s'écrire $\sqrt{a(x-\alpha)(x-\beta)}$, ou $(x-\alpha)\sqrt{a\frac{x-\beta}{x-\alpha}}$, on a à intégrer une fonction rationnelle de x et de $\sqrt{a\frac{x-\beta}{x-\alpha}}$, ce qu'on pourra faire (n° 210) en posant

$$\frac{x-\beta}{x-\alpha} = \pm t^2.$$

on posera donc

$$y - \sqrt{c} = tx.$$

3° On pourra aussi couper la conique par des droites parallèles à une de ses asymptotes :

$$y = x\sqrt{a} + t.$$

Généralement, avant d'employer l'un ou l'autre de ces procédés, il pourra être utile de *simplifier d'abord* le polynome sous le radical en posant $x = z + h$, de manière à faire disparaître le terme en z.

214. Exemple I. — Calculer $\mathrm{I} = \int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{x^2+1}}$.

On coupera la conique $y^2 = x^2 + 1$ par des droites parallèles à une asymptote, en posant

$$y = x + t,$$

d'où

$$x^2 + 1 = (x+t)^2,$$

ce qui donne

$$x = \frac{1-t^2}{2t}, \qquad y = x + t = \frac{1+t^2}{2t}, \qquad dx = -\frac{1}{2}\,\frac{1+t^2}{t^2}\,dt.$$

Portons ces valeurs dans I; il vient

$$\mathrm{I} = -\int \frac{(1-t^2)^2}{4t^2}\,\frac{2t}{1+t^2}\,\frac{1}{2}\,\frac{1+t^2}{t^2}\,dt = -\frac{1}{4}\int \frac{(1-t^2)^2}{t^3}\,dt,$$

c'est-à-dire

$$\mathrm{I} = -\frac{1}{4}\int \frac{dt}{t^3} + \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t} - \frac{1}{4}\int t\,dt = \frac{1}{8}\,\frac{1}{t^2} + \frac{1}{2}\log t - \frac{1}{8}\,t^2.$$

Remplaçons maintenant t par sa valeur en x. On a

$$t = y - x = \sqrt{x^2+1} - x;$$

d'où, en observant que $\frac{1}{t} = \sqrt{x^2+1} + x$,

$$\mathrm{I} = \frac{1}{2}\,x\sqrt{x^2+1} + \frac{1}{2}\log(\sqrt{x^2+1} - x).$$

215. Exemple II. — Calculer $J = \int \sqrt{x^2+1}\, dx$.

La même substitution donnera :

$$\begin{aligned} J = -\int \frac{1+t^2}{2t} \frac{1}{2} \frac{1+t^2}{t^2} dt &= -\frac{1}{4}\int \frac{t^4+2t^2+1}{t^3} dt \\ &= -\frac{1}{4}\left(\int t\,dt + \int \frac{2\,dt}{t} + \int \frac{dt}{t^3}\right) \\ &= -\frac{1}{4}\left(\frac{t^2}{2} + 2\log t - \frac{1}{2t^2}\right) \\ &= \frac{1}{2}x\sqrt{x^2+1} - \frac{1}{2}\log(\sqrt{x^2+1} - x). \end{aligned}$$

216. Exemple III. — Calculer $I = \int \frac{x^5\,dx}{\sqrt{x^2+a}}$.

La fonction sous le signe $\int$ est impaire en x; on posera donc, sans introduire de nouveau radical, $x^2 = z$; $x\,dx = \frac{1}{2}dz$, d'où

$$I = \frac{1}{2}\int \frac{z^2\,dz}{\sqrt{z+a}},$$

ce qui rentre dans le type du n° 210, et l'on intégrera en posant $z + a = t^2$. On posera donc de suite, dans I, $x^2 + a = t^2$, et l'on sera ramené à intégrer la fonction rationnelle de t, $\int (t^2 - a)^2\,dt$.

217. Exemple IV. — Calculer $J = \int \frac{\alpha x + \beta}{\sqrt{ax^2+2bx+c}} dx$.

Simplifions d'abord le radical en posant, pour faire disparaître le terme du premier degré,

$$x + \frac{b}{a} = z.$$

On a

$$J = \int \frac{\alpha z + \beta - \frac{\alpha}{a}b}{\sqrt{az^2+k}} dz,$$

en posant, pour simplifier, $k = \frac{ac - b^2}{a}$.

L'intégrale J se décompose ainsi en deux autres,

$$\alpha \int \frac{z\,dz}{\sqrt{az^2+k}} \quad \text{et} \quad \left(\beta - \frac{\alpha}{a}b\right)\int \frac{dz}{\sqrt{az^2+k}}.$$

La première est évidemment $\frac{\alpha}{a}\sqrt{az^2+k}$; reste donc à calculer

$$\int \frac{dz}{\sqrt{az^2+k}}.$$

Pour n'introduire que des quantités réelles, distinguons plusieurs cas.

1° $a > 0$. On écrit

$$\int \frac{dz}{\sqrt{az^2+k}} = \int \frac{1}{\sqrt{a}} \frac{dz}{\sqrt{z^2+\frac{k}{a}}} = \frac{1}{\sqrt{a}} \log\left(z+\sqrt{z^2+\frac{k}{a}}\right);$$

2° $a < 0$, mais $k > 0$. On écrit, en posant $a = -a'$,

$$\int \frac{dz}{\sqrt{-a'z^2+k}} = \int \frac{1}{\sqrt{a'}} \frac{dz}{\sqrt{\frac{k}{a'}-z^2}} = \frac{1}{\sqrt{a'}} \arcsin\left(\frac{z}{\sqrt{\frac{k}{a'}}}\right).$$

3° $a < 0$, et $k < 0$: en ce cas on ne peut obtenir $\int \frac{dz}{\sqrt{az^2+k}}$ sous forme réelle, puisque la différentielle est imaginaire. On écrira, comme dans le premier cas,

$$\int \frac{dz}{\sqrt{az^2+k}} = \frac{1}{\sqrt{a}} \log\left(z+\sqrt{z^2+\frac{k}{a}}\right).$$

218. Exemple V. — Calculer $I = \int \frac{dx}{(x-\lambda)\sqrt{ax^2+2bx+c}}$.

On applique la méthode générale, en coupant la conique

$$y^2 = ax^2+2bx+c$$

par des droites issues du point de coordonnées λ et μ, étant posé $\mu = \sqrt{a\lambda^2+2b\lambda+c}$.

Posons donc

$$y-\mu = t(x-\lambda), \tag{1}$$

d'où

$$\sqrt{ax^2+2bx+c} = \mu + t(x-\lambda).$$

Élevons au carré, et observons que $\mu^2 = a\lambda^2+2b\lambda+c$:

$$a(x^2-\lambda^2)+2b(x-\lambda) = 2\mu t(x-\lambda)+t^2(x-\lambda)^2.$$

Supprimons le facteur $x-\lambda$ qui correspond au point fixe; il vient, pour exprimer x en fonction rationnelle de t, la relation

$$(2)\qquad t^2(x-\lambda)+2\mu t = a(x+\lambda)+2b.$$

Il faudrait résoudre par rapport à x et en déduire dx en fonction de dt : il sera plus simple de différentier sans résoudre, ce qui donne

$$2\,dt[t(x-\lambda)+\mu]+(t^2-a)\,dx = 0;$$

d'où

$$\frac{-2\,dt}{t^2-a} = \frac{dx}{\mu+t(x-\lambda)} = \frac{dx}{y}.$$

L'intégrale cherchée, I, est

$$\int\frac{dx}{y(x-\lambda)};$$

on a donc

$$\mathrm{I} = \int\frac{dx}{y}\,\frac{1}{x-\lambda} = -\int\frac{2\,dt}{(t^2-a)(x-\lambda)}.$$

Or l'équation (2) donne

$$(x-\lambda)(t^2-a) = -2\mu t+2\lambda a+2b;$$

d'où

$$\mathrm{I} = \int\frac{dt}{\mu t-\lambda a-b} = \frac{1}{\mu}\log(\mu t-\lambda a-b).$$

On a donc finalement, en remplaçant μ par sa valeur $\sqrt{a\lambda^2+2b\lambda+c}$ et t par sa valeur tirée de (1), à savoir

$$t = \frac{y-\mu}{x-\lambda} = \frac{\sqrt{ax^2+2bx+c}-\mu}{x-\lambda},$$

$$\int\frac{dx}{(x-\lambda)\sqrt{ax^2+2bx+c}}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{a\lambda^2+2b\lambda+c}}\log\left(\sqrt{a\lambda^2+2b\lambda+c}\,\frac{\sqrt{ax^2+2bx+c}-\sqrt{a\lambda^2+2b\lambda+c}}{x-\lambda}-\lambda a-b\right).$$

219. L'intégrale

$$\int f(x, \sqrt{ax+b}, \sqrt{cx+d})\,dx,$$

où f est rationnel par rapport à x et aux deux radicaux, se ramène au cas général du n° **212**.

Posons, en effet,

$$ax + b = z^2;$$

l'intégrale devient

$$\int f\left(\frac{z^2 - b}{a}, z, \sqrt{\frac{c}{a}(z^2 - b) + d}\right) 2\frac{z\,dz}{a}.$$

On a ainsi à intégrer une fonction rationnelle de z et d'un radical de la forme $\sqrt{A z^2 + C}$, ce qu'on fera par un des procédés ci-dessus.

On peut encore opérer autrement : la fonction à intégrer, étant rationnelle en x, $\sqrt{ax + b}$ et $\sqrt{cx + d}$, est de la forme

$$f = \frac{A + B\sqrt{ax + b} + C\sqrt{cx + d} + D\sqrt{ax + b}\sqrt{cx + d}}{A_1 + B_1\sqrt{ax + b} + \dots},$$

A, B, ..., A_1, B_1, ... désignant des polynomes entiers en x.

Si l'on rend le dénominateur rationnel, ce qui est toujours facile en multipliant les deux termes de la fraction par un facteur convenable, f prend la forme

$$f = \frac{M + N\sqrt{ax + b} + P\sqrt{cx + d} + Q\sqrt{ax + b}\sqrt{cx + d}}{R},$$

M, N, P, Q, R étant des polynomes en x, et l'intégrale $\int f\,dx$ se ramène à quatre autres :

1° $\int \frac{M}{R}\,dx$, intégrale de fraction rationnelle;

2° $\int \frac{N}{R}\sqrt{ax + b}\,dx$, qu'on ramène à l'intégrale d'une fraction rationnelle en posant $ax + b = t^2$ (n° 210);

3° $\int \frac{P}{R}\sqrt{cx + d}\,dx$, qu'on traite de même;

4° $\int \frac{Q}{R}\sqrt{(ax + b)(cx + d)}\,dx$, qui s'obtient par un des procédés du n° 213, par exemple en posant $\frac{ax + b}{cx + d} = t^2$.

220. Exemple. — Soit $I = \int \frac{\sqrt{x + 1}}{x + \sqrt{x}}\,dx.$

Rendons le dénominateur rationnel en multipliant les deux

termes par $x - \sqrt{x}$; il vient

$$I = \int \frac{(x - \sqrt{x})\sqrt{x+1}}{x^2 - x}\, dx,$$

c'est-à-dire

$$I = \int \frac{\sqrt{x+1}}{x-1}\, dx - \int \frac{\sqrt{x}\sqrt{x+1}}{x^2 - x}\, dx.$$

La première intégrale se calcule en posant $x + 1 = t^2$ (n° **210**);

$$\begin{aligned}\int \frac{\sqrt{x+1}}{x-1}\, dx &= 2\int \frac{t^2}{t^2-2}\, dt \\ &= 2\int\left(1 + \frac{2}{t^2-2}\right) dt = 2t + \sqrt{2}\int\left(\frac{dt}{t-\sqrt{2}} - \frac{dt}{t+\sqrt{2}}\right) \\ &= 2t + \sqrt{2}\log\frac{t-\sqrt{2}}{t+\sqrt{2}} = 2\sqrt{x+1} + \sqrt{2}\log\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{2}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{2}}.\end{aligned}$$

La seconde intégrale, $-\int \frac{\sqrt{x(x+1)}}{x^2-x}\, dx$, est toute ramenée au type général du n° **212**; on la calculera en posant, par exemple, $\frac{x+1}{x} = t^2$; d'où

$$-\int \frac{\sqrt{\frac{x+1}{x}}}{(x-1)}\, dx = +\int 2t\,\frac{t\,dt}{(t^2-1)^2}\,\frac{t^2-1}{2-t^2} = 2\int \frac{t^2\,dt}{(t^2-1)(2-t^2)} \cdots.$$

4° *Fonctions rationnelles des coordonnées d'un point d'une courbe unicursale.*

221. Si y est une fonction implicite de x, définie par

$$\varphi(x, y) = 0,$$

où $\varphi(x, y) = 0$ représente une courbe unicursale, toute intégrale de la forme

$$\int f(x, y)\, dx,$$

où f est rationnel en x et y, pourra être calculée.

En effet, par *courbe unicursale* on entend une courbe telle que les coordonnées x, y d'un de ses points puissent s'exprimer

en fonction *rationnelle* d'un paramètre t. On aura donc

$$x = \theta(t), \qquad y = \psi(t), \qquad dx = \theta'(t)\,dt,$$

et l'intégrale proposée deviendra

$$\int f[\theta(t), \psi(t)]\,\theta'(t)\,dt = \int F(t)\,dt,$$

$F(t)$ désignant une fonction *rationnelle* de t, qu'on sait intégrer.

On voit que c'est la généralisation de la théorie du n° **212**: la courbe $\varphi(x, y) = 0$ était alors $y^2 = ax^2 + 2bx + c$, c'est-à-dire une conique, qui est bien une courbe unicursale.

222. Exemple. — Soit $I = \int \frac{dx}{(x^3 - x^2)^{\frac{2}{3}}}$.

Si l'on pose

$$y = (x^3 - x^2)^{\frac{1}{3}}, \qquad \text{ou} \qquad y^3 = x^3 - x^2,$$

on aura

$$I = \int \frac{dx}{y^2},$$

intégrale qui rentre dans le type ci-dessus, car la courbe $y^3 = x^3 - x^2$ est unicursale (cubique ayant un point double à l'origine). Pour exprimer x et y en fonction d'un paramètre, t, on coupera la cubique par des sécantes, $y = tx$, issues du point double; il vient ainsi

$$t^3x^3 = x^3 - x^2;$$

d'où

$$x = \frac{1}{1 - t^3}, \qquad dx = \frac{3t^2\,dt}{(1 - t^3)^2}, \qquad y = tx = \frac{t}{1 - t^3}.$$

Portons ces valeurs dans I, nous trouvons

$$I = \int \frac{dx}{y^2} = \int \frac{3t^2\,dt}{(1 - t^3)^2}\,\frac{(1 - t^3)^2}{t^2} = 3\int dt = 3t.$$

L'intégrale proposée est donc, en remplaçant t par sa valeur $\frac{y}{x}$, ou $\frac{(x^3 - x^2)^{\frac{1}{3}}}{x}$,

$$I = 3\sqrt[3]{\frac{x - 1}{x}}.$$

223. Propriété fondamentale des courbes unicursales. — Nous avons défini la courbe unicursale une courbe telle que les coordonnées d'un de ses points puissent s'exprimer en fonction rationnelle d'un paramètre t; on peut dire aussi qu'une courbe d'ordre n est unicursale quand elle a $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ points doubles, nombre maximum de points doubles que puisse avoir une courbe *indécomposable* de degré n.

L'identité des deux définitions résulte des théorèmes suivants :

224. Théorème I. — *Une courbe indécomposable d'ordre n ne peut avoir plus de $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ points doubles.*

Supposons, en effet, qu'une telle courbe C_n, d'ordre n, ait

$$\frac{1}{2}(n-1)(n-2)+1$$

points doubles; considérons les courbes C_{n-2}, d'ordre $n-2$, *adjointes* à C_n, c'est-à-dire passant par ces points doubles.

L'équation générale des courbes d'ordre $n-2$ contient, *sous forme linéaire et homogène*, un nombre de coefficients égal à $\frac{1}{2}(n-1)n$; celle des courbes C_{n-2} en contiendra donc, *sous la même forme*, un nombre *au moins* égal à

$$\frac{1}{2}n(n-1)-\frac{1}{2}(n-1)(n-2)-1,$$

c'est-à-dire $n-2$: on pourra donc faire passer une de ces courbes par $n-3$ points choisis arbitrairement sur C_n, car on a à écrire pour cela $n-3$ équations, qui sont linéaires et homogènes par rapport aux $n-2$ coefficients inconnus, et qui par suite ont toujours au moins une solution. La courbe C_{n-2} ainsi déterminée coupe dès lors la proposée, C_n, aux points doubles de celle-ci et en $(n-3)$ autres points simples, ce qui donne, au total, un nombre de points d'intersection égal à

$$2\left[\frac{1}{2}(n-1)(n-2)+1\right]+n-3=n(n-2)+1,$$

puisque chaque point double équivaut à deux points d'intersec-

tion. Or une courbe d'ordre $n-2$ ne peut couper une courbe C_n, d'ordre n, en plus de $n(n-2)$ points, que si elle fait partie de C_n ou si elle se décompose en courbes dont l'une fait partie de C_n : dès lors la courbe C_n proposée n'est pas indécomposable, contrairement à l'hypothèse.

Donc C_n ne peut avoir plus de $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ points doubles.

C. Q. F. D.

225. Théorème II. — *Une courbe indécomposable d'ordre n, qui a $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ points doubles, est unicursale.*

En effet, les courbes C_{n-2}, adjointes à C_n, dépendent, *sous forme linéaire et homogène,* de $\frac{1}{2}n(n-1)-\frac{1}{2}(n-1)(n-2)=n-1$ coefficients. Celles d'entre elles qui passent par $n-3$ points simples, pris sur C_n, ont donc une équation de la forme

$$\lambda A(x,y)+\mu B(x,y)=0, \tag{1}$$

λ et μ étant des coefficients arbitraires ([1]); elles coupent C_n aux $(n-3)$ points simples et aux $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ points doubles, ce qui donne un nombre d'intersections fixes égal à

$$(n-3)+2\frac{(n-1)(n-2)}{2} \quad \text{ou} \quad n(n-2)-1.$$

Dès lors une quelconque des courbes (1) ne coupe C_n, en dehors des points fixes, qu'en *un* seul point mobile; d'après la théorie de l'élimination, les coordonnées de ce point sont des fonctions rationnelles des coefficients qui figurent dans les équations des deux courbes; ce sont donc des fonctions rationnelles du paramètre $\frac{\lambda}{\mu}$.

C. Q. F. D.

([1]) Toujours parce que la condition de passer par des points donnés établit des relations linéaires et homogènes entre les coefficients de l'équation d'une courbe.

226. Théorème III. — *Une courbe unicursale indécomposable d'ordre n a $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ points doubles.*

Tout d'abord, on peut admettre que la droite de l'infini coupe l'unicursale proposée, d'ordre n, en n points distincts; dans le cas contraire, il suffirait de substituer à la courbe donnée sa perspective sur un plan convenable, perspective qui est évidemment une courbe *unicursale* de même ordre et d'autant de points doubles que la proposée.

Soient alors $a_1, a_2, \ldots, a_n$ les valeurs du paramètre t qui répondent aux n points à l'infini de l'unicursale; en posant

$$F(t) = (t-a_1)(t-a_2)\ldots(t-a_n),$$

les coordonnées, x et y, d'un point de la courbe auront une expression paramétrique de la forme

$$(2) \qquad x = \frac{f(t)}{F(t)}, \qquad y = \frac{\varphi(t)}{F(t)},$$

$f(t)$ et $\varphi(t)$ désignant des polynomes en t. Ces polynomes sont d'ordre n, au plus, puisque la courbe doit être coupée en n points par une droite quelconque $ax+by+c=0$. Nous pouvons même admettre que $f(t)$ et $\varphi(t)$ sont d'ordre $(n-1)$ au plus : il suffit de prendre pour origine le point de la courbe qui répond à la valeur $t=\infty$ du paramètre; alors x et y devant s'annuler pour $t=\infty$, il faut bien que $f(t)$ et $\varphi(t)$ aient leurs degrés respectifs inférieurs au degré n de $F(t)$.

Cherchons maintenant à déterminer les points doubles de la courbe (2) : il est clair qu'à un point double correspondent deux valeurs *différentes* du paramètre t, et réciproquement; pour trouver ces points il faut donc chercher les solutions, en t et u, communes aux deux équations

$$(3) \qquad \frac{f(t)}{F(t)} = \frac{f(u)}{F(u)}, \qquad \frac{\varphi(t)}{F(t)} = \frac{\varphi(u)}{F(u)}.$$

Or $f(t)$ ayant son degré inférieur à celui de $F(t)$, on peut

décomposer $\frac{f(t)}{F(t)}$ en fractions simples sous la forme

$$\frac{f(t)}{F(t)} = \frac{A_1}{t-a_1} + \frac{A_2}{t-a_2} + \ldots + \frac{A_n}{t-a_n}.$$

De même on a

$$\frac{\varphi(t)}{F(t)} = \frac{B_1}{t-a_1} + \ldots\ldots\ldots\ldots + \frac{B_n}{t-a_n}.$$

Les équations (3) s'écrivent alors, en groupant les termes analogues en t et u,

$$A_1 \frac{t-u}{(t-a_1)(u-a_1)} + \ldots + A_n \frac{(t-u)}{(t-a_n)(u-a_n)} = 0,$$

$$B_1 \frac{t-u}{(t-a_1)(u-a_1)} + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = 0.$$

Supprimons la solution, évidente *a priori*, $t = u$, qui ne donne pas de point double; il reste, en posant $t + u = s$, $tu = p$:

$$(4) \qquad \begin{cases} A_1 \dfrac{1}{p - sa_1 + a_1^2} + \ldots + A_n \dfrac{1}{p - sa_n + a_n^2} = 0, \\ B_1 \dfrac{1}{p - sa_1 + a_1^2} + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = 0. \end{cases}$$

A un point double répond un et un seul système de valeurs de p, s vérifiant ces deux relations, et réciproquement; le nombre des points doubles est donc égal au nombre des systèmes (p, s) donnés par les équations (4).

Chassons les dénominateurs dans ces équations; nous obtenons, en p et s, deux équations d'ordre $n-1$, qui ont $(n-1)^2$ solutions communes; mais en chassant les dénominateurs, nous introduisons des solutions étrangères à (4), à savoir les valeurs de p et s qui annulent deux quelconques de ces n dénominateurs. Or, on peut grouper ceux-ci deux à deux de $\frac{1}{2}n(n-1)$ manières, à chacune desquelles répond *un* système (p, s), puisque les dénominateurs sont linéaires en p et s; le nombre cherché des solutions vraies est donc

$$(n-1)^2 - \frac{1}{2}n(n-1) = \frac{1}{2}(n-1)(n-2).$$

c'est-à-dire qu'une unicursale d'ordre n a $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ points doubles. C. Q. F. D.

227. Application. — Soit l'équation

$$(x^2+y^2)^2 = a^2(x^2-y^2); \tag{5}$$

c'est celle d'une lemniscate, courbe d'ordre *quatre* qui a *trois* points doubles : l'origine et les deux points circulaires à l'infini. Elle représente donc une courbe unicursale, et l'on peut exprimer les coordonnées x, y en fonction d'un paramètre λ.

Appliquons pour cela la méthode du n° 225. Les courbes adjointes d'ordre $n-2$ sont ici des cercles passant par l'origine; ils coupent la lemniscate en un nombre de points mobiles égal à $2.4-3.2=2$; considérons ceux d'entre eux qui passent par *un* point fixe de la courbe, ceux par exemple qui touchent, à l'origine, la droite $y=x$, tangente à l'une des branches de la lemniscate; leur équation est

$$x^2+y^2+\lambda(x-y)=0, \tag{6}$$

et chacun d'eux coupe la courbe en *un* seul point mobile. L'abscisse x de ce point s'obtient en éliminant y entre les relations (5) et (6); on a, en combinant ces deux équations,

$$\lambda^2(x-y)^2 = a^2(x^2-y^2),$$

et, en supprimant le facteur $(x-y)$, qui correspond à des points communs fixes,

$$\lambda^2(x-y) = a^2(x+y), \qquad \text{d'où} \qquad y = x\frac{\lambda^2-a^2}{\lambda^2+a^2}.$$

Portant cette valeur de y dans (6), on obtient l'équation en x :

$$2x^2\frac{\lambda^4+a^4}{(\lambda^2+a^2)^2} + \lambda x\frac{2a^2}{\lambda^2+a^2} = 0.$$

D'où, finalement,

$$x = -a^2\lambda\frac{\lambda^2+a^2}{\lambda^4+a^4},$$

$$y = x\frac{\lambda^2-a^2}{\lambda^2+a^2} = -a^2\lambda\frac{\lambda^2-a^2}{\lambda^4+a^4}.$$

III. — FONCTIONS TRANSCENDANTES QUE L'ON SAIT INTÉGRER.

1° *Fonctions rationnelles de* $\sin x$ *et* $\cos x$.

228. Pour intégrer $\int f(\sin x, \cos x)\, dx$, où f est une fonction rationnelle, il suffit de poser

$$\operatorname{tang}\frac{1}{2}x = t,$$

d'où

$$x = 2\operatorname{arc\,tang} t, \qquad dx = \frac{2\,dt}{1+t^2},$$

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \qquad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2},$$

et l'intégrale proposée se ramène ainsi à l'intégrale d'une fonction rationnelle de t, puisque $\sin x$, $\cos x$, $\frac{dx}{dt}$ sont rationnels en t.

229. Exemples. — 1° L'intégrale $\int \frac{dx}{\sin x}$ devient, par la substitution ci-dessus :

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{2\,dt}{1+t^2}\,\frac{1+t^2}{2t} = \int \frac{dt}{t} = \log t,$$

donc

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \log\left(\operatorname{tang}\frac{x}{2}\right).$$

Changeant x en $\frac{\pi}{2} - x$, on a la formule analogue :

$$-\int \frac{dx}{\cos x} = \log \operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right).$$

On calculerait, par le même changement de variable, l'intégrale

$$I = \int \frac{dx}{a\cos x + b\sin x};$$

il vaut mieux la ramener à une quadrature précédente, en posant

$$\operatorname{tang}\varphi = \frac{a}{b},$$

ce qui donne

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{\cos\varphi}{b} \frac{dx}{\sin(x+\varphi)} \\ &= \frac{\cos\varphi}{b} \log\left(\tang\frac{x+\varphi}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}} \log\left(\tang\frac{x+\varphi}{2}\right). \end{aligned}$$

2° De même on a, si m désigne un entier positif,

$$\int \frac{dx}{\sin^m x} = \int \frac{(1+t^2)^{m-1}}{2^{m-1}t^m} dt,$$

ce qu'on calcule immédiatement, en développant le binome du numérateur, et en divisant chaque terme par t^m.

L'intégrale $\int \frac{dx}{\cos^m x}$ se présenterait, après le changement de variable, sous une forme plus compliquée, car il y aurait en dénominateur $(1-t^2)^m$; il vaut mieux la déduire de la précédente, préalablement calculée, en changeant x en $\frac{\pi}{2} - x$.

230. Remarques. — Souvent un changement de variable plus simple que le précédent permet d'arriver au même résultat; voici, à ce point de vue, les cas particuliers les plus fréquents.

1° Si $f(\sin x, \cos x)$ est une fonction *paire par rapport à* $\sin x$ et $\cos x$, c'est-à-dire si elle ne change pas quand on change simultanément $\sin x$ et $\cos x$ en $-\sin x$ et $-\cos x$, on posera

$$\tang x = t, \qquad x = \operatorname{arc\,tang} t,$$

d'où

$$dx = \frac{dt}{1+t^2}, \qquad \sin x = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}, \qquad \cos x = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}};$$

et, dans la fonction $f(\sin x, \cos x) = f\left(\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}, \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\right)$, le radical $\sqrt{1+t^2}$ disparaîtra, puisque, en vertu de l'hypothèse, il ne figurera qu'à des puissances paires. L'intégrale $\int f(\sin x, \cos x)\,dx$ sera donc ramenée à l'intégrale d'une fonction rationnelle de t.

2° Si $f(\sin x, \cos x)$ est une fonction *impaire en* $\cos x$, c'est-à-dire si elle est de la forme $F(\sin x, \cos^2 x)\cos x$, F étant rationnel, on posera

$$\sin x = t,$$

d'où

$$\int F(\sin x, \cos^2 x) \cos x \, dx = \int F(t, 1-t^2)\, dt.$$

3° Si $f(\sin x, \cos x)$ est *impaire en* $\sin x$, on posera de même

$$\cos x = t.$$

231. Exemples. — (*a*). Soit $\int \frac{dx}{a\cos^2 x + 2b \sin x \cos x + c \sin^2 x}$.

On a à intégrer une fonction paire de $\sin x$ et $\cos x$; on posera donc (1°)

$$\tan x = t,$$

d'où

$$\int \frac{dx}{a\cos^2 x + \ldots} = \int \frac{dt}{1+t^2} \, \frac{1+t^2}{a+2bt+ct^2} = \int \frac{dt}{a+2bt+ct^2}.$$

Par exemple

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x - \sin^2 x} = \int \frac{dt}{1-t^2} = \frac{1}{2} \log \frac{1+t}{1-t} = \frac{1}{2} \log \frac{1+\tan x}{1-\tan x}.$$

Le même changement de variable donne très simplement l'intégrale $\int \frac{dx}{\sin^m x \cos^n x}$, où m et n sont entiers et positifs, et $m+n$ pair, car cette intégrale devient

$$\int \frac{(1+t^2)^{\frac{1}{2}(m+n-2)}}{t^m} dt.$$

(*b*). Soit $\int \frac{dx}{\tan^3 x} = \int \frac{dx \cos^3 x}{\sin^3 x}$.

On a à intégrer une fonction impaire de $\cos x$, et l'on posera (2°)

$$\sin x = t,$$

d'où

$$\int \frac{dx \cos^3 x}{\sin^3 x} = \int \frac{\cos^2 x (\cos x \, dx)}{\sin^3 x} = \int \frac{(1-t^2)\, dt}{t^3} = -\frac{1}{2} \frac{1}{t^2} - \log t,$$

et finalement

$$\int \frac{dx}{\tan^3 x} = -\frac{1}{2} \frac{1}{\sin^2 x} - \log \sin x.$$

Si l'on avait eu à calculer $\int \tan^3 x\,dx$, il eût mieux valu (3°) poser $\cos x = t$, pour n'avoir toujours que t^3 au dénominateur de la fraction rationnelle en t.

(c). Soit enfin $\int \sin^4 x\,dx$.

On pourrait prendre comme variable $\tan x$, mais le calcul serait assez compliqué, car on aurait, au dénominateur de la fraction rationnelle en t, le facteur $(1+t^2)^3$. Il vaut mieux intégrer par parties :

$$\begin{aligned}\int \sin^4 x\,dx &= \int \sin^3 x(\sin x\,dx)\\ &= -\sin^3 x\cos x + \int 3\sin^2 x\cos^2 x\,dx\\ &= -\sin^3 x\cos x + 3\int \sin^2 x\,dx - 3\int \sin^4 x\,dx.\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}4\int \sin^4 x\,dx &= 3\int \sin^2 x\,dx - \sin^3 x\cos x\\ &= \frac{3}{2}\int (1-\cos 2x)\,dx - \sin^3 x\cos x\\ &= \frac{3}{2}x - \frac{3}{4}\sin 2x - \sin^3 x\cos x,\end{aligned}$$

et finalement

$$\int \sin^4 x\,dx = \frac{3}{8}x - \frac{3}{16}\sin 2x - \frac{1}{4}\sin^3 x\cos x.$$

Une méthode analogue s'applique à $\int \sin^m x\cos^n x\,dx$, quand m et n sont des entiers positifs pairs, ce qui est le cas le plus difficile : car, si m était impair, on poserait $\cos x = t$; si n impair, $\sin x = t$, et l'on obtiendrait immédiatement l'intégrale.

2° *Fonctions rationnelles de e^{mx}.*

232. L'intégrale

$$\int f(e^{mx})\,dx,$$

où f est une fonction rationnelle, se ramène à l'intégrale d'une

différentielle rationnelle de t par la substitution

$$e^{mx} = t;$$

d'où

$$mx = \log t, \qquad dx = \frac{1}{m}\frac{dt}{t},$$

et par suite

$$\int f(e^{mx})\,dx = \frac{1}{m}\int f(t)\frac{dt}{t}.$$

Exemple. — Soit $\int \frac{e^x+1}{e^{2x}+1}dx$; on pose $e^x = t$, et l'intégrale devient

$$\int \frac{t+1}{t^2+1}\frac{dt}{t} = \int dt\left(\frac{1}{t} + \frac{1-t}{t^2+1}\right) = \log t + \operatorname{arc\,tang} t - \frac{1}{2}\log(t^2+1).$$

233. Remarque. — Une fonction rationnelle de $\sin x$ et $\cos x$ est, à cause des relations

$$\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} = \frac{e^{2ix} - 1}{2ie^{ix}},$$

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} = \frac{e^{2ix} + 1}{2e^{ix}},$$

une fonction rationnelle de e^{ix}. On pourra donc l'intégrer, non seulement par les méthodes des nos **228-231**, mais encore par celle du no **232**, en posant $e^{ix} = t$. Au cours de ce calcul, on profitera de toutes les simplifications qui pourront se présenter.

Exemple. — Soit $\int \cos^4 x\,dx$; on a

$$\begin{aligned}\int \cos^4 x\,dx &= \frac{1}{16}\int (e^{ix} + e^{-ix})^4\,dx\\ &= \frac{1}{16}\int [e^{4ix} + e^{-4ix} + 4(e^{2ix} + e^{-2ix}) + 6]\,dx\\ &= \frac{1}{16}\int 2\cos 4x\,dx + \frac{4}{16}\int 2\cos 2x\,dx + \frac{6}{16}\int dx\\ &= \frac{1}{32}\sin 4x + \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{3}{8}x.\end{aligned}$$

En réalité, on n'a fait, par ce calcul, qu'exprimer $\cos^4 x$ en fonction de $\cos 4x$ et $\cos 2x$, selon la formule (8) du no **153**.

D'une manière générale, les formules de ce numéro, qui

donnent $\cos^m x$ et $\sin^m x$, pour m entier et positif, en fonction linéaire de $\cos px$ et $\sin px$, permettent d'effectuer immédiatement les quadratures $\int \cos^m x\,dx$, $\int \sin^m x\,dx$.

3° *Polynomes entiers en x, e^{ax}, e^{bx}, ..., $\sin \alpha x$, $\cos \alpha x$, ...*

234. On remplacera d'abord les sin et cos par leurs valeurs en exponentielles

$$\sin \alpha x = \frac{e^{\alpha i x} - e^{-\alpha i x}}{2i}, \qquad \cos \alpha x = \frac{e^{\alpha i x} + e^{-\alpha i x}}{2}, \qquad \ldots,$$

et l'on sera ramené à intégrer un polynome entier en x, e^{ax}, e^{bx}, $e^{\alpha i x}$, $e^{-\alpha i x}$, ..., c'est-à-dire une somme de termes de la forme $x^p e^{ax}$. Tout revient donc à calculer l'intégrale

$$I_p = \int e^{ax} x^p\,dx,$$

p étant un entier positif et a quelconque. Or on a, en intégrant par parties,

$$\int x^p (e^{ax}\,dx) = x^p \frac{e^{ax}}{a} - \frac{p}{a} \int e^{ax} x^{p-1}\,dx,$$

$$I_p = \frac{1}{a} x^p e^{ax} - \frac{p}{a} I_{p-1}.$$

En répétant cette réduction, on ramènera I_p à l'intégrale I_0 :

$$I_0 = \int e^{ax}\,dx = \frac{1}{a} e^{ax},$$

et le problème sera résolu.

Après le calcul, on remplacera, dans le résultat, les exponentielles imaginaires par leurs valeurs en sin et cos, de manière à n'avoir que des quantités réelles.

Remarque. — Le calcul de I_p peut se faire d'un seul coup en appliquant la formule d'intégration par parties généralisée du n° 195 :

$$\int v u^{(n)}\,dx = u^{(n-1)} v - u^{(n-2)} v' + u^{(n-3)} v'' + \ldots$$
$$+ (-1)^{n-1} u v^{(n-1)} + (-1)^n \int u v^{(n)}\,dx.$$

Par exemple, en désignant par $P(x)$ un polynome d'ordre p en x, faisons, dans la formule ci-dessus,

$$v = P(x), \qquad n = p + 1, \qquad u = \frac{1}{a^{p+1}} e^{ax};$$

nous obtenons, puisque $v^{(n)}$, dérivée d'ordre $p + 1$ de $P(x)$, est identiquement nulle,

$$\int P(x) e^{ax} dx = e^{ax} \left[\frac{1}{a} P(x) - \frac{1}{a^2} P'(x) + \frac{1}{a^3} P''(x) + \ldots + \frac{(-1)^p}{a^{p+1}} P^{(p)}(x) \right].$$

235. Exemples. — 1° Soit $\int e^x \cos 2x \, dx$.

Écrivons :

$$\begin{aligned}
\int e^x \cos 2x \, dx &= \frac{1}{2} \int [e^{x(1+2i)} + e^{x(1-2i)}] \, dx \\
&= \frac{1}{2} \frac{e^{x(1+2i)}}{1+2i} + \frac{1}{2} \frac{e^{x(1-2i)}}{1-2i} \\
&= \frac{e^x}{2} \left(\frac{\cos 2x + i \sin 2x}{1+2i} + \frac{\cos 2x - i \sin 2x}{1-2i} \right) \\
&= \frac{e^x}{10} (2 \cos 2x + 4 \sin 2x).
\end{aligned}$$

On aurait pu aussi intégrer par parties :

$$\int \cos 2x (e^x dx) = e^x \cos 2x + 2 \int e^x \sin 2x \, dx,$$

$$2 \int \sin 2x (e^x dx) = 2 e^x \sin 2x - 4 \int e^x \cos 2x \, dx,$$

et, en ajoutant membre à membre,

$$5 \int e^x \cos 2x \, dx = e^x (\cos 2x + 2 \sin 2x).$$

2° Soit encore $\int x^2 \cos x \, dx$.

Au lieu d'appliquer la méthode générale, on peut intégrer par parties :

$$\int x^2 (\cos x \, dx) = x^2 \sin x - \int 2x \sin x \, dx.$$

De même

$$-2\int x(\sin x\,dx) = 2x\cos x - 2\int \cos x\,dx = 2x\cos x - 2\sin x.$$

Donc enfin

$$\int x^2\cos x\,dx = x^2\sin x + 2x\cos x - 2\sin x.$$

4° *Polynomes entiers en x et* $\log x$, *ou en x et* arc sin x.

236. 1° Pour intégrer un polynome entier en x et $\log x$, c'est-à-dire la différentielle $x^m(\log x)^p\,dx$, où m et p sont entiers, on posera

$$\log x = t, \qquad \text{d'où} \qquad x = e^t, \qquad dx = e^t\,dt.$$

Il viendra

$$\int x^m(\log x)^p\,dx = \int e^{(m+1)t}\,t^p\,dt,$$

intégrale que l'on sait calculer (n° 234); il n'est même pas nécessaire pour cela de supposer m entier.

2° Pour intégrer un polynome entier en x et arc sin x, c'est-à-dire la différentielle $x^m(\arcsin x)^p\,dx$, on posera de même

$$\arcsin x = t, \qquad \text{d'où} \qquad x = \sin t, \qquad dx = \cos t\,dt.$$

Il viendra

$$\int x^m(\arcsin x)^p\,dx = \int t^p\sin^m t\cos t\,dt,$$

et l'on sait aussi calculer la dernière intégrale (n° 234).

Exemple. — Soit $\int(\arcsin x)^2\,dx$.

On aura

$$\int(\arcsin x)^2\,dx = \int t^2\cos t\,dt = t^2\sin t + 2t\cos t - 2\sin t,$$

d'après le n° 235, 2°; d'où

$$\int(\arcsin x)^2\,dx = x(\arcsin x)^2 + 2(\arcsin x)\sqrt{1-x^2} - 2x.$$

CHAPITRE II.

RÉDUCTION D'INTÉGRALES INDÉFINIES.

237. En dehors des cas qui viennent d'être indiqués, l'intégrale $\int f(x)\,dx$ ne pourra généralement pas s'exprimer à l'aide des fonctions élémentaires; elle définira donc une fonction nouvelle de x, et ce fait ouvre à l'Analyse un champ d'études très étendu.

Dans cet ordre d'idées, en prenant pour $f(x)$ une fonction d'un type particulier, par exemple une fonction rationnelle de x et de $\sqrt{ax^3+bx^2+cx+d}$, il importe d'abord de reconnaître combien on doit introduire de fonctions nouvelles, pour qu'on puisse, avec leur aide et l'aide des fonctions élémentaires, exprimer toutes les intégrales du type considéré; en d'autres termes, il pourra arriver que les intégrales proposées se réduisent à quelques-unes d'entre elles, et c'est cette recherche qu'on nomme *réduction* des intégrales de la classe donnée.

On conçoit qu'un pareil problème exige, pour chaque type d'intégrales, des méthodes particulières; il ne peut donc être question que d'exemples. Nous en donnerons plusieurs, en commençant par celui de la réduction des intégrales hyperelliptiques et elliptiques.

I. — RÉDUCTION DES INTÉGRALES HYPERELLIPTIQUES.

238. Soit X un polynome en x, de degré supérieur à *deux;* si $f(x, \sqrt{X})$ est une fonction rationnelle de x et de $\sqrt{X}$, on désigne sous le nom d'*intégrales hyperelliptiques* les intégrales du type

$$\int f(x, \sqrt{X})\,dx. \tag{1}$$

Lorsque X est un polynome du troisième ou du quatrième degré, l'intégrale (1) est dite *elliptique :* ce nom provient de ce que l'arc d'ellipse s'exprime par une intégrale de la forme (1).

On peut toujours supposer que X n'a que des racines simples; car s'il y avait une racine double, a, le facteur $(x-a)$ sortirait du radical; si a était racine triple, $(x-a)$ sortirait aussi du radical, et il resterait, sous le radical, le facteur *simple* $(x-a)$; et ainsi de suite.

239. *Si le polynome* X *est de degré pair* $2q$, *on peut, par une substitution rationnelle, le ramener au degré* $2q-1$.

Soit, en effet, a_1 une racine de X; on a

$$\sqrt{X}=\sqrt{(x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_{2q})}.$$

Faisons la substitution

$$t=\frac{1}{x-a_1}, \qquad \text{ou} \qquad x=a_1+\frac{1}{t};$$

on aura

$$\begin{aligned}\sqrt{X}&=\sqrt{\frac{1}{t}\left(a_1-a_2+\frac{1}{t}\right)\cdots\left(a_1-a_{2q}+\frac{1}{t}\right)}\\&=\frac{1}{t^q}\sqrt{[t(a_1-a_2)+1]\ldots[t(a_1-a_{2q})+1]},\end{aligned}$$

et le polynome en t, sous le radical, est d'ordre $2q-1$. Désignons-le par T; il vient

$$\int f(x,\sqrt{X})\,dx=-\int f\left(a_1+\frac{1}{t},\ \frac{1}{t^q}\sqrt{T}\right)\frac{dt}{t^2}=\int \varphi(t,\sqrt{T})\,dt,$$

φ étant une fonction rationnelle de t et de $\sqrt{T}$. C. Q. F. D.

240. On a donc le droit de supposer que le polynome X est de degré impair $2q+1$; cette hypothèse, d'ailleurs, n'interviendra pas jusqu'à nouvel ordre dans les calculs suivants, qui s'appliquent aussi bien au cas où X est de degré pair.

241. **Première réduction.** — Un polynome entier quelconque en x et en $\sqrt{X}$ se met évidemment sous la forme $M+N\sqrt{X}$, où M et N sont des polynomes entiers en x; car toute puissance paire

du radical est un polynome entier, toute puissance impaire est le produit du radical par un tel polynome. Une fonction rationnelle en x et $\sqrt{X}$ étant, d'après sa définition, le quotient de deux expressions analogues, sera de la forme

$$f(x, \sqrt{X}) = \frac{M + N\sqrt{X}}{P + Q\sqrt{X}}.$$

Multiplions le numérateur et le dénominateur du second membre par $P - Q\sqrt{X}$ pour rendre le dénominateur rationnel; il vient

$$f(x, \sqrt{X}) = \frac{(M + N\sqrt{X})(P - Q\sqrt{X})}{P^2 - Q^2 X} = \frac{A + B\sqrt{X}}{C},$$

A, B, C étant des polynomes entiers en x. On a ainsi, pour l'intégrale proposée (1),

$$\int f(x, \sqrt{X})\, dx = \int \frac{A}{C}\, dx + \int \frac{B}{C}\sqrt{X}\, dx.$$

L'intégrale $\int \frac{A}{C}\, dx$ est celle d'une fonction rationnelle de x, qu'on sait calculer; il reste donc à étudier l'intégrale $\int \frac{B}{C}\sqrt{X}\, dx$, qu'on peut écrire $\int \frac{BX}{C\sqrt{X}}\, dx$, ou

$$\int \frac{D}{C\sqrt{X}}\, dx, \tag{2}$$

C et D étant des polynomes entiers en x, et le radical $\sqrt{X}$ ne figurant qu'au dénominateur.

Décomposons maintenant en éléments simples la fraction rationnelle $\frac{D}{C}$; l'intégrale (2) se ramènera à une somme d'intégrales des deux formes suivantes :

$$\int x^n \frac{dx}{\sqrt{X}}, \tag{3}$$

$$\int \frac{dx}{(x - a)^n \sqrt{X}}, \tag{4}$$

n désignant un entier positif quelconque. Une seconde réduction

va nous permettre de ramener les intégrales (3) et (4), que nous désignerons par I_n et J_n, à un nombre fini d'entre elles.

242. Seconde réduction. — Considérons d'abord l'intégrale

$$(3) \qquad I_n = \int x^n \frac{dx}{\sqrt{X}};$$

pour la réduire nous partirons de l'identité

$$(5) \qquad (x^p\sqrt{X})' = px^{p-1}\sqrt{X} + \frac{1}{2}x^p\frac{X'}{\sqrt{X}} = \frac{\frac{1}{2}x^pX' + px^{p-1}X}{\sqrt{X}},$$

où p désigne un entier positif ou nul, quelconque.

Soit h le degré du polynome X; le numérateur, au dernier membre de (5), est un polynome de degré $h+p-1$, où le coefficient de x^{h+p-1} n'est jamais nul; car si l'on pose

$$X = A_0x^h + \ldots,$$

on a

$$\frac{1}{2}x^pX' + px^{p-1}X = A_0\left(\frac{1}{2}h + p\right)x^{h+p-1} + \ldots,$$

et la quantité $\frac{1}{2}h + p$ est toujours positive, puisque $h > 0$ et $p \geqq 0$.

L'identité (5) s'écrit, en ordonnant, suivant les puissances décroissantes de x, le polynome numérateur du dernier membre,

$$(x^p\sqrt{X})' = \alpha\frac{x^{h+p-1}}{\sqrt{X}} + \beta\frac{x^{h+p-2}}{\sqrt{X}} + \ldots + \frac{\lambda}{\sqrt{X}},$$

$\alpha, \beta, \ldots, \lambda$ étant des constantes dont la première n'est pas nulle. Intégrons maintenant les deux membres; il vient

$$x^p\sqrt{X} = \alpha I_{h+p-1} + \beta I_{h+p-2} + \ldots + \lambda I_0,$$

relation qui donne I_{h+p-1} en fonction des intégrales d'indice inférieur, pourvu que p soit $\geqq 0$.

Faisons successivement $p = 0, 1, 2, \ldots$, dans cette relation; elle permettra d'exprimer les intégrales $I_{h-1}, I_h, I_{h+1}, \ldots$ en fonction de $I_{h-2}, I_{h-3}, \ldots, I_0$; en d'autres termes :

Les intégrales I_n *se ramènent à* $(h-1)$ *d'entre elles, à savoir* $I_0, I_1, \ldots, I_{h-2}$.

243. Considérons en second lieu l'intégrale

$$(5)\qquad J_n = \int \frac{dx}{(x-a)^n \sqrt{X}}.$$

Nous partirons, pour la réduire, de l'identité

$$(6)\qquad \left[\frac{\sqrt{X}}{(x-a)^p}\right]' = \frac{1}{2}\,\frac{X'}{(x-a)^p\sqrt{X}} - p\,\frac{\sqrt{X}}{(x-a)^{p+1}} = \frac{\frac{1}{2}(x-a)X' - pX}{(x-a)^{p+1}\sqrt{X}},$$

où p désigne un entier positif, au moins égal à *un*. Au dernier membre de (6), le numérateur est un polynome d'ordre h, $\varphi(x)$, que nous pouvons ordonner suivant les puissances croissantes de $x-a$:

$$\varphi(x) = \varphi(a) + (x-a)\,\varphi'(a) + \ldots + \frac{(x-a)^h}{h!}\,\varphi^h(a),$$

et il est à observer que $\varphi(a)$ n'est pas nul, à moins que a ne soit une racine du polynome X. On a, en effet,

$$\varphi(x) = \frac{1}{2}(x-a)X' - pX, \qquad \varphi(a) = -pX(a).$$

Si donc a n'est pas racine de X, l'identité (6) s'écrit

$$(7)\qquad \left[\frac{\sqrt{X}}{(x-a)^p}\right]' = \frac{\varphi(a)}{(x-a)^{p+1}\sqrt{X}} + \frac{\varphi'(a)}{(x-a)^p\sqrt{X}} + \ldots + \frac{F(x)}{\sqrt{X}},$$

$F(x)$ étant un polynome entier en x, qui n'existe d'ailleurs que si h est au moins égal à $p+1$. Intégrons maintenant les deux membres de (7); il vient

$$\frac{\sqrt{X}}{(x-a)^p} = \varphi(a)\,J_{p+1} + \varphi'(a)\,J_p + \ldots,$$

les termes non écrits renferment des intégrales J, d'indice inférieur à p, et pouvant aussi renfermer des intégrales I, si $p+1 \leqq h$. Cette relation permet, puisque $\varphi(a)$ n'est pas nul et que p peut partir de la valeur *un*, d'exprimer J_2 en fonction de J_1 et d'intégrales I, puis J_3 en fonction de J_2, J_1 et des I, et ainsi de suite. En d'autres termes :

Si a n'est pas racine du polynome X, les intégrales J_n se ramènent à l'intégrale J_1, et aux intégrales I_n.

Reste à discuter la réduction des J_n lorsque a est racine de X. En ce cas, $\varphi(a)$ est nul; mais $\varphi'(a)$ n'est pas nul. Car on a

$$\varphi(x) = \frac{1}{2}(x-a)X' - pX;$$

d'où

$$\varphi'(x) = \frac{1}{2}X' + \frac{1}{2}(x-a)X'' - pX', \qquad \varphi'(a) = \left(\frac{1}{2} - p\right)X'(a).$$

Or $X'(a)$ n'est pas nul, puisque X n'a que des racines simples (n° 238), et $\frac{1}{2} - p$ n'est jamais nul, puisque p est entier.

L'équation (7) s'écrit alors

$$\left[\frac{\sqrt{X}}{(x-a)^p}\right]' = \frac{\varphi'(a)}{(x-a)^p\sqrt{X}} + \frac{\frac{1}{2}\varphi''(a)}{(x-a)^{p-1}\sqrt{X}} + \ldots + \frac{F(x)}{\sqrt{X}};$$

et, en intégrant,

$$\frac{\sqrt{X}}{(x-a)^p} = \varphi'(a)\,J_p + \ldots,$$

les termes non écrits renfermant des intégrales J d'indice inférieur à p, et pouvant aussi contenir des intégrales I, si $p+1 \leqq h$.

Cette relation, où l'on donne à p successivement les valeurs $1, 2, \ldots$, permet d'exprimer $J_1, J_2, \ldots$, en fonction des intégrales I; donc,

Si a est racine du polynome X, les intégrales J_n se ramènent aux intégrales I_n.

244. Conclusions. — Supposons le degré, h, de X impair,

$$h = 2q+1;$$

d'après ce qui précède, l'intégrale $\int f(x, \sqrt{X})\,dx$ se ramène à des intégrales connues et aux intégrales nouvelles suivantes :

$$I_0 = \int \frac{dx}{\sqrt{X}}, \qquad I_1 = \int \frac{x\,dx}{\sqrt{X}}, \qquad \ldots, \qquad I_{h-2} = I_{2q-1} = \int \frac{x^{2q-1}\,dx}{\sqrt{X}},$$

$$J_1(x, a) = \int \frac{dx}{(x-a)\sqrt{X}},$$

où a n'est pas racine du polynome X. Si a est racine de X, $J_1(x, a)$ se ramène aux intégrales $I_0, I_1, \ldots, I_{2q-1}$.

Donc les intégrales hyperelliptiques correspondant à un polynome X, d'ordre $2q+1$, introduisent en tout $2q+1$ nouvelles fonctions; les $2q$ premières, $I_0, I_1, \ldots, I_{2q-1}$, sont des fonctions de x seul; la dernière, J_1, est fonction de x et d'un paramètre a.

Si X est de degré pair, $h = 2q+2$, les raisonnements précédents permettent de réduire l'intégrale hyperelliptique générale aux intégrales $I_0, I_1, \ldots, I_{2q}$ et J_1, en tout à $2q+2$ fonctions nouvelles; mais ces fonctions peuvent se réduire à $2q+1$ d'entre elles : cela résulte de ce que, par la substitution du n° **239**, on peut abaisser d'une unité le degré du polynome X.

II. — RÉDUCTION DES INTÉGRALES ELLIPTIQUES.

Comme on l'a vu au n° **237**, l'intégrale hyperelliptique est dite *elliptique* quand le polynome sous le radical est du quatrième ou du troisième ordre; la théorie de la réduction s'applique à ces cas sans modification.

Cas du polynome du troisième ordre.

245. Si le polynome X est d'ordre trois, les intégrales elliptiques s'expriment, d'après le n° **244**, à l'aide des *trois* fonctions nouvelles

$$I_0 = \int \frac{dx}{\sqrt{X}}, \qquad I_1 = \int \frac{x\,dx}{\sqrt{X}}, \qquad J_1 = \int \frac{dx}{(x-a)\sqrt{X}}.$$

Ces trois fonctions se nomment respectivement *intégrales elliptiques de première, de deuxième* et *de troisième espèce*. On apprendra à les calculer dans le Cours de seconde année.

Cas du polynome du quatrième ordre.

246. Ce cas se ramène au précédent par un changement de

variable (n° **239**); en raison de l'importance pratique de cette réduction, nous allons indiquer diverses méthodes pour l'effectuer.

On distinguera deux cas : celui où le polynome X est bicarré, et le cas général.

247. Polynome bicarré. — Soit l'intégrale elliptique ramenée (n° **241**) à la forme

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)\sqrt{X}}\,dx,$$

où $X = mx^4 + nx^2 + p$, et où P et Q sont des polynomes en x. Multiplions, sous le signe $\int$, les deux termes de la fraction par le polynome $Q(-x)$; au dénominateur, le produit $Q(x)Q(-x)$ est un polynome pair en x, c'est-à-dire un polynome en x^2, $K(x^2)$; au numérateur, dans le produit $P(x)Q(-x)$, réunissons les termes de degré pair et ceux de degré impair en x, nous aurons ainsi

$$\int \frac{P}{Q\sqrt{X}}\,dx = \int \frac{G(x^2) + xH(x^2)}{K(x^2)}\,\frac{dx}{\sqrt{mx^4+nx^2+p}},$$

G, H, K étant des polynomes en x^2. Posons $x^2 = y$, d'où $dx = \frac{1}{2}\frac{dy}{\sqrt{y}}$, et $x\,dx = \frac{1}{2}dy$; il vient

$$\int \frac{P}{Q\sqrt{X}}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{G(y)\,dy}{K(y)\sqrt{y(my^2+ny+p)}} + \frac{1}{2}\int \frac{H(y)\,dy}{K(y)\sqrt{my^2+ny+p}}.$$

Au second membre, la seconde intégrale ne dépend que d'un radical portant sur un polynome du deuxième ordre; on sait donc la calculer par les fonctions élémentaires (n° **212**). La première intégrale est elliptique; et le polynome sous le radical, à savoir

$$y(my^2+ny+p)$$

est du *troisième ordre*. La réduction est donc effectuée.

On aurait pu, dans ce calcul, au lieu de poser $x^2 = y$, poser $x^2 = \frac{1}{z}$; les résultats eussent été analogues.

248. Polynome général. Première méthode. — C'est celle du n° 239. Soit α une racine du polynome X; on aura

$$X = (x - \alpha)(mx^3 + nx^2 + px + q).$$

Dans l'intégrale $\int \frac{P(x)}{Q(x)\sqrt{X}}\,dx$, on posera

$$y = \frac{1}{x - \alpha},$$

d'où

$$x = \frac{\alpha y + 1}{y}, \qquad dx = -\frac{dy}{y^2},$$

ce qui donne

$$\begin{aligned}\sqrt{X} &= (x - \alpha)\sqrt{\frac{mx^3 + nx^2 + px + q}{x - \alpha}}\\ &= \frac{1}{y^2}\sqrt{m(\alpha y + 1)^3 + ny(\alpha y + 1)^2 + py^2(\alpha y + 1) + qy^3},\end{aligned}$$

d'où

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}\frac{dx}{\sqrt{X}} = -\int \frac{P\left(\frac{\alpha y + 1}{y}\right)}{Q\left(\frac{\alpha y + 1}{y}\right)} \frac{dy}{\sqrt{m(\alpha y + 1)^3 + \ldots + qy^3}},$$

et l'on est bien ramené au cas d'un radical portant sur un polynome *d'ordre trois*.

Cette méthode convient quand α est une racine *réelle* du polynome X; les calculs précédents n'introduisent alors que des quantités *réelles*.

249. Seconde méthode. — Supposons le polynome X décomposé en deux facteurs réels du second degré, ce qui est toujours possible quand les coefficients de X sont réels :

$$X = (ax^2 + 2bx + c)(mx^2 + 2nx + p).$$

Si les quatre racines λ, μ, λ', μ' du polynome X sont réelles, on fera en sorte que les deux plus grandes, λ et μ, soient racines du premier trinome, $ax^2 + 2bx + c$; si deux racines sont imaginaires conjuguées, elles seront nécessairement les racines d'un même trinome.

Cela posé, on va chercher à effectuer un changement de variable rationnel et réel, de manière à ramener X *à la forme bicarrée*.

Distinguons deux cas.

Premier cas. — Si l'on a

$$an - bm = 0,$$

on écrira

$$X = \frac{m}{a}(ax^2 + 2bx + c)\left(ax^2 + 2bx + \frac{pa}{m}\right),$$

et il suffira de poser

$$x + \frac{b}{a} = y$$

pour avoir

$$X = ma\left(y^2 + \frac{c}{a} - \frac{b^2}{a^2}\right)\left(y^2 + \frac{p}{m} - \frac{b^2}{a^2}\right),$$

ce qui est bien une forme bicarrée.

Second cas. — Si l'on a, au contraire,

$$an - bm \gtrless 0,$$

on posera

$$(8) \qquad x = \frac{\alpha y + \beta}{y + 1}, \qquad \text{d'où} \qquad dx = \frac{\alpha - \beta}{(y+1)^2}dy,$$

α et β étant des constantes. Il vient

$$\sqrt{X} = \frac{1}{(y+1)^2}\sqrt{[a(\alpha y + \beta)^2 + 2b(y+1)(\alpha y + \beta) + c(y+1)^2][m(\alpha y + \beta)^2 + \ldots]}.$$

Choisissons α et β de manière à annuler, sous le radical, le coefficient de y dans chacun des deux facteurs entre crochets; le polynome sous le radical deviendra bicarré en y. On a ainsi

$$a\alpha\beta + b(\alpha + \beta) + c = 0,$$
$$m\alpha\beta + n(\alpha + \beta) + p = 0,$$

équations qui donnent linéairement $\alpha\beta$ et $\alpha + \beta$, car le déterminant $an - bm$ n'est pas nul, par hypothèse. On en déduira les valeurs de α et β par une équation du second degré : je dis que

ces valeurs seront *distinctes* [1] et *réelles*. On a, en effet,

$$\alpha+\beta=\frac{cm-ap}{an-bm}, \qquad \alpha\beta=\frac{bp-cn}{an-bm};$$

et, pour que α et β soient réels et distincts, il faut et il suffit que l'on ait

$$(cm-ap)^2-4(bp-cn)(an-bm)>0.$$

Le premier membre de cette inégalité, égalé à zéro, exprimerait que les deux facteurs en lesquels on a décomposé le polynome X, à savoir

$$ax^2+2bx+c, \qquad mx^2+2nx+p,$$

ont une racine commune. Si donc λ et μ sont les racines du premier trinome, λ' et μ' celles du second, on aura, d'après la théorie de l'élimination,

$$\begin{aligned}(cm-ap^2)&-4(bp-cn)(an-bm)\\ &=a^2m^2(\lambda-\lambda')(\lambda-\mu')(\mu-\lambda')(\mu-\mu'),\end{aligned}$$

identité que l'on peut aussi vérifier directement, en développant le second membre et remplaçant les sommes et produits $\lambda+\mu$, $\lambda\mu$, $\lambda'+\mu'$, $\lambda'\mu'$ par leurs valeurs, $-\frac{2b}{a}$, $\frac{c}{a}$, $-\frac{2n}{m}$, $\frac{p}{m}$.

Or, d'après les hypothèses faites plus haut, l'expression

$$a^2m^2(\lambda-\lambda')(\lambda-\mu')(\mu-\lambda')(\mu-\mu')$$

est positive : car, si les quatre racines λ, μ, λ', μ' sont réelles, λ et μ sont, par hypothèse, les deux plus grandes; si λ' et μ' sont imaginaires conjugués, λ et μ étant réels, les facteurs $\lambda-\lambda'$ et $\lambda-\mu'$, ainsi que $\mu-\lambda'$, $\mu-\mu'$, sont imaginaires conjugués et leur produit est positif; enfin si λ et μ, λ' et μ' sont imaginaires conjugués, les facteurs $\lambda-\lambda'$ et $\mu-\mu'$, ainsi que $\lambda-\mu'$, $\mu-\lambda'$, le sont également, de sorte que leur produit est encore positif.

---

[1] Car, pour que x, c'est-à-dire $\frac{\alpha y+\beta}{y+1}$, dépende effectivement de y, c'est-à-dire pour que $\frac{\alpha y+\beta}{y+1}$ ne soit pas une constante, il est nécessaire et suffisant que $\alpha-\beta \gtrless 0$, c'est-à-dire que α et β soient distincts.

Ainsi, dans tous les cas, α et β seront réels et distincts; on aura dès lors ramené par la substitution rationnelle et réelle, $x = \frac{\alpha y + \beta}{y + 1}$, le polynome sous le radical à être *bicarré*, et l'on a :

$$\sqrt{X} = \frac{1}{(y+1)^2}\sqrt{(qy^2+r)(q'y^2+r')},$$

q, r, q', r' étant réels. Par suite, en remplaçant dx par sa valeur (8),

$$(9)\quad \int \frac{P(x)}{Q(x)\sqrt{X}}\,dx = \int (\alpha - \beta)\frac{P\left(\frac{\alpha y + \beta}{y+1}\right)}{Q\left(\frac{\alpha y + \beta}{y+1}\right)}\frac{dy}{\sqrt{(qy^2+r)(q'y^2+r')}}.$$

On ramènera ensuite le polynome bicarré sous le radical au troisième ordre, par l'une des substitutions $y^2 = z$, ou $y^2 = \frac{1}{z}$, comme au n° **247**, et la réduction sera effectuée.

250. Remarque. — Dans le Cours de seconde année, on trouvera avantage à ce que le polynome du troisième degré sous le radical ait ses racines réelles.

Or, la deuxième méthode précédente (n° **249**), applicable au polynome général du quatrième degré, conduit toujours à un polynome du troisième degré à racines réelles. En effet, si l'on pose $y^2 = z$ dans l'intégrale (9), et si l'on opère comme au n° **247**, on arrive à une intégrale elliptique, où le polynome sous le radical est

$$z(qz + r)(q'z + r')$$

et a, par suite, ses trois racines réelles, puisque q, r, q', r' sont réels.

Cette remarque s'applique aussi au premier cas du n° **249**.

Dans le cas où le polynome du quatrième degré est donné d'abord sous la forme bicarrée générale,

$$X = mx^4 + nx^2 + p,$$

on a vu qu'en posant $x^2 = y$ on obtenait, sous le radical, le polynome du troisième ordre

$$y(my^2 + ny + p),$$

qui n'a ses racines réelles que si la quantité $n^2 - 4mp$ est positive. Dans le cas où elle est négative, pour arriver à un polynome du troisième ordre à racines réelles, il faut appliquer la méthode générale du n° 249, en décomposant d'abord $mx^4 + nx^2 + p$ en deux facteurs réels du second degré.

Enfin, si l'on donne d'abord sous le radical un polynome du troisième degré ayant deux racines imaginaires conjuguées, on ramènera ce cas à celui d'un polynome général du quatrième degré en posant $x = \frac{1}{y}$, et l'on appliquera ensuite la méthode du n° 249.

Par exemple l'intégrale

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^3+1}}$$

deviendra, par ce changement de variable,

$$\int \frac{-dy}{\sqrt{y(y^3+1)}};$$

on décomposera ensuite $y(y^3+1)$ en deux facteurs réels du second degré, (y^2+y), (y^2-y+1), et l'on continuera comme au n° 249.

Exemple. — Soit l'intégrale

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^4+1}};$$

on demande de la ramener, par une substitution réelle, à une intégrale elliptique où le polynome sous le radical soit du troisième ordre, à racines réelles.

La substitution $x^2 = y$ ne convient pas, car elle donnerait sous le radical le polynome $y(y^2+1)$, qui a deux racines imaginaires. Appliquons alors la méthode du n° 249, en décomposant x^4+1 en deux facteurs réels du second degré :

$$x^4+1 = (x^2+1)^2 - 2x^2 = (x^2 + x\sqrt{2} + 1)(x^2 - x\sqrt{2} + 1).$$

Posons

$$x = \frac{\alpha y + \beta}{y+1}$$

et déterminons α et β de manière que le terme en y manque dans les deux polynomes

$$(\alpha y+\beta)^2+\sqrt{2}(\alpha y+\beta)(y+1)+(y+1)^2,$$
$$(\alpha y+\beta)^2-\sqrt{2}(\alpha y+\beta)(y+1)+(y+1)^2.$$

Nous trouvons ainsi

$$2\alpha\beta+\sqrt{2}(\alpha+\beta)+2=0,$$
$$2\alpha\beta-\sqrt{2}(\alpha+\beta)+2=0,$$

d'où

$$\alpha+\beta=0, \qquad \alpha\beta=-1;$$

nous prendrons $\alpha=1$, $\beta=-1$, ce qui donne

$$x=\frac{y-1}{y+1}, \qquad dx=\frac{2dy}{(y+1)^2}.$$

L'intégrale proposée devient alors

$$2\int\frac{dy}{\sqrt{[y^2(2+\sqrt{2})+2-\sqrt{2}][y^2(2-\sqrt{2})+2+\sqrt{2}]}};$$

posons-y maintenant

$$y^2=z$$

ou

$$y=\sqrt{z}, \qquad dy=\frac{1}{2}\frac{dz}{\sqrt{z}};$$

nous obtenons finalement l'intégrale sous la forme demandée :

$$\int\frac{dz}{\sqrt{z[z(2+\sqrt{2})+2-\sqrt{2}][z(2-\sqrt{2})+2+\sqrt{2}]}}.$$

251. Formes normales de Legendre. — Legendre, qui le premier a étudié systématiquement les intégrales elliptiques, ne réduisait pas le polynome X au troisième degré, mais à la forme particulière

$$X=(1-x^2)(1-k^2x^2),$$

qui se déduit, à un facteur constant près, de la forme bicarrée $(qy^2+r)(q'y^2+r')$ du n° **249**, par le changement de variable $y=x\sqrt{-\frac{r}{q}}$. Le paramètre k se nomme alors le *module*.

La théorie générale permet de ramener les intégrales elliptiques correspondantes aux quatre transcendantes nouvelles

$$\int \frac{dx}{\sqrt{X}}, \quad \int \frac{x\,dx}{\sqrt{X}}, \quad \int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{X}}, \quad \int \frac{dx}{(x-a)\sqrt{X}},$$

qui doivent (n° **244**) se réduire à *trois*. En effet, la seconde, par le changement de variable $x^2 = t$, devient

$$\frac{1}{2}\int \frac{dt}{\sqrt{(1-t)(1-k^2 t)}}$$

et s'exprime à l'aide des fonctions élémentaires (n° **212**), puisque le polynome sous le radical n'est plus que du second ordre.

Cas du polynome du second ordre.

252. Si X est du second degré, on sait calculer, à l'aide des fonctions élémentaires (n° **212**), les intégrales $\int f(x, \sqrt{X})\,dx$, où f est rationnel. Toutefois les procédés de réduction des numéros précédents (**241-243**) conduiront souvent à des calculs plus simples que la méthode directe d'intégration : ces procédés permettent en effet (n° **244**) de ramener l'intégrale $\int f(x, \sqrt{X})\,dx$ aux *deux* intégrales

$$I_0 = \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+2bx+c}}, \qquad J_1 = \int \frac{dx}{(x-\lambda)\sqrt{ax^2+2bx+c}},$$

qui ont été calculées, la première au n° **217**, la seconde au n° **218**.

III. — RÉDUCTION DES INTÉGRALES ABÉLIENNES DE GENRE UN.

---

253. Donnons d'abord quelques définitions.

Intégrales abéliennes. — Soit $\varphi(x, y) = 0$ l'équation d'une courbe algébrique; on nomme *intégrale abélienne* appartenant

à cette courbe toute intégrale du type

$$\int f(x, y)\, dx,$$

où $f(x, y)$ est une expression rationnelle en x et y, et où y est supposée liée à x par l'équation $\varphi(x, y) = 0$ de la courbe donnée.

Genre. — On nomme *genre* d'une courbe algébrique indécomposable de degré n la différence entre le nombre maximum de points doubles que comporte ce degré, à savoir

$$\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$$

d'après le n° **224**, et le nombre effectif d des points doubles de la courbe. On a ainsi, p désignant le genre,

$$p = \frac{1}{2}(n-1)(n-2) - d.$$

Si la courbe a un point triple à tangentes distinctes, ce point est équivalent à trois points doubles, et, en général, un *point* multiple d'ordre h, à tangentes distinctes, équivaut à $\frac{1}{2}h(h-1)$ points doubles.

Les courbes de genre *zéro* sont unicursales et réciproquement (nos **224-226**); et l'on peut dire (n° **221**) que toute intégrale abélienne appartenant à une courbe de genre *zéro* est réductible aux fonctions élémentaires.

Correspondance univoque. — On dit que deux courbes planes, $\varphi(x, y) = 0$, $\psi(\xi, \eta) = 0$, se correspondent d'une manière *univoque,* ou *point par point,* quand on peut, à tout point de l'une, faire correspondre un et un seul point de l'autre, et réciproquement.

Analytiquement, si x, y et ξ, η désignent les coordonnées de deux points correspondants, il faudra évidemment que ξ et η s'expriment rationnellement en x et y :

$$(1) \qquad \xi = F(x, y), \qquad \eta = G(x, y),$$

F et G étant des fonctions rationnelles. Inversement, si ξ et η vérifient la relation $\psi(\xi, \eta) = 0$, les deux équations (1), jointes à

$\varphi(x, y) = 0$, ont, en x et y, une, et une seule, solution commune, puisqu'à un point ξ, η ne répond qu'un point x, y. D'après la théorie de l'élimination, les valeurs x et y, correspondant à cette solution, s'exprimeront rationnellement en fonction des coefficients qui figurent dans φ et dans les équations (1), c'est-à-dire de ξ et de η; de sorte que l'on a

$$x = \Phi(\xi, \eta), \qquad y = \Theta(\xi, \eta), \tag{2}$$

Φ et Θ étant rationnels en ξ, η. Les équations (1) et (2) sont celles qui établissent la correspondance univoque entre les deux courbes proposées.

Lemme. — *Si deux courbes se correspondent point par point, toute intégrale abélienne appartenant à l'une est transformable en une intégrale abélienne appartenant à l'autre.*

Soit, en effet, l'intégrale abélienne

$$\int f(\xi, \eta)\, d\xi, \tag{3}$$

appartenant à la courbe $\psi(\xi, \eta) = 0$; si l'on y fait la transformation rationnelle donnée par les formules (1), à savoir

$$\xi = F(x, y), \qquad \eta = G(x, y), \tag{4}$$

x et y seront liés par l'équation $\varphi(x, y) = 0$, puisque, par hypothèse, quand le point ξ, η décrit la courbe $\psi = 0$, le point correspondant x, y décrit la courbe $\varphi = 0$, et réciproquement. On a, d'ailleurs,

$$d\xi = \frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\partial F}{\partial y} dy, \qquad 0 = \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy,$$

d'où, en éliminant dy,

$$d\xi = \frac{\dfrac{\partial F}{\partial x}\dfrac{\partial \varphi}{\partial y} - \dfrac{\partial F}{\partial y}\dfrac{\partial \varphi}{\partial x}}{\dfrac{\partial \varphi}{\partial y}} dx, \tag{5}$$

et l'intégrale (3), si l'on y remplace ξ, η et $d\xi$ par leurs valeurs (4)

et (5) en x, y et dx, prend la forme

$$\int g(x, y)\,dx,$$

g étant rationnel en x et y, et x, y étant liées par $\varphi(x, y) = 0$.

C. Q. F. D.

Cela posé, nous allons indiquer comment on peut réduire les *intégrales abéliennes de genre un*, c'est-à-dire appartenant à une courbe de genre *un*.

254. Cubique plane. — Supposons d'abord que la courbe de genre *un* soit une cubique plane, c'est-à-dire une courbe du troisième ordre sans point double; le genre d'une telle courbe est bien $p = \frac{1}{2} 2 . 1 = 1$.

En transportant l'origine en un point de la cubique, l'équation de celle-ci s'écrit

$$Ax^3 + Bx^2y + Cy^2x + Dy^3 + ax^2 + bxy + cy^2 + \alpha x + \beta y = 0;$$

coupons-la par une sécante, $y = tx$, issue de l'origine. Il vient, en éliminant y et supprimant le facteur x,

$$x^2(A + Bt + Ct^2 + Dt^3) + x(a + bt + ct^2) + \alpha + \beta t = 0,$$

d'où, en résolvant par rapport à x cette équation du second degré,

(6) $$x = \text{fonction rationnelle de } t \text{ et de } \sqrt{T},$$

T désignant le polynome du *quatrième ordre* en t sous le radical.

Par suite aussi,

(7) $$y = tx = \text{fonction rationnelle de } t \text{ et de } \sqrt{T}.$$

De même enfin, en différentiant l'expression de x,

(8) $$dx = dt \times \text{fonction rationnelle de } t \text{ et de } \sqrt{T}.$$

On a ainsi exprimé les coordonnées d'un point de la cubique en fonction irrationnelle d'un paramètre t.

Soit maintenant une intégrale abélienne quelconque

$$\int f(x, y)\,dx,$$

appartenant à la cubique; remplaçons-y x, y et dx par leurs valeurs (6), (7) et (8) en fonction de t, $\sqrt{T}$ et dt; cette intégrale prendra la forme

$$\int g(t, \sqrt{T})\,dt,$$

g étant rationnel en t et $\sqrt{T}$: c'est là une intégrale elliptique, puisque le polynome T est d'ordre quatre; donc :

Toute intégrale abélienne appartenant à une cubique de genre un est réductible à une intégrale elliptique.

255. Courbe générale de genre un. — Soit une courbe quelconque de genre *un*, $\varphi(x, y) = 0$, de degré n. Par hypothèse, ses points doubles sont au nombre de

$$\frac{1}{2}(n-1)(n-2)-1;$$

considérons maintenant les courbes d'ordre $n-2$, C_{n-2}, adjointes à la proposée, c'est-à-dire passant par les points doubles; leur équation générale renferme, sous forme linéaire et homogène, un nombre de coefficients égal à

$$\frac{1}{2}(n-1)n - \left[\frac{1}{2}(n-1)(n-2)-1\right], \quad \text{c'est-à-dire à } n,$$

puisque l'équation générale des courbes d'ordre $n-2$ dépend de $\frac{1}{2}(n-1)n$ coefficients.

Celles des courbes adjointes C_{n-2} qui passent par $n-3$ points simples, choisis arbitrairement sur la proposée, auront donc, dans leur équation générale, $n-(n-3)$, c'est-à-dire *trois* coefficients, et cette équation sera, dès lors, du type

$$(9) \qquad \lambda_1 f_1(x, y) + \lambda_2 f_2(x, y) + \lambda_3 f_3(x, y) = 0.$$

D'ailleurs, chacune des courbes (9) coupera la proposée $\varphi(x, y) = 0$ en *trois* points mobiles; car le nombre total des points d'intersection d'une courbe (9) et de la proposée étant $(n-2)n$, et le nombre des intersections fixes étant : 1° de $2\left[\frac{1}{2}(n-1)(n-2)-1\right]$ pour les points doubles; 2° de $(n-3)$

pour les points simples choisis, il reste, pour le nombre des points mobiles communs,

$$(n-2)n - 2\left[\frac{1}{2}(n-1)(n-2)-1\right]-(n-3), \quad \text{c'est-à-dire } 3.$$

Maintenant, à tout point x, y de la proposée $\varphi(x, y) = 0$, faisons correspondre le point de coordonnées ξ, η, définies par

$$(10) \qquad \xi = \frac{f_2(x, y)}{f_1(x, y)}, \qquad \eta = \frac{f_3(x, y)}{f_1(x, y)};$$

le lieu de ce point ξ, η, lorsque x, y décrit la courbe $\varphi(x, y) = 0$, sera une courbe K, que je dis correspondre point par point à la proposée.

En effet, d'après (10), à un point x, y ne correspond qu'un seul point ξ, η; inversement, il faut prouver qu'à tout point ξ, η ne répond qu'un point x, y de la proposée. Supposons qu'il en soit autrement, c'est-à-dire qu'aux valeurs ξ_0, η_0 puissent répondre au moins deux points x, y, de coordonnées a, b et a', b'; on aurait alors

$$\xi_0 = \frac{f_2}{f_1}(a', b') = \frac{f_2}{f_1}(a, b), \qquad \eta_0 = \frac{f_3}{f_1}(a', b') = \frac{f_3}{f_1}(a, b),$$

d'où

$$\frac{f_1(a', b')}{f_1(a, b)} = \frac{f_2(a', b')}{f_2(a, b)} = \frac{f_3(a', b')}{f_3(a, b)}.$$

Ces relations montrent que toutes les courbes (9) qui passent par le point a, b de la proposée passeraient aussi par le point a', b'; elles ne couperaient donc la proposée qu'en $3 - 2$, c'est-à-dire en *un* seul point mobile, et, comme leur équation renferme encore *un* paramètre linéaire, les coordonnées du point mobile s'exprimeraient en fonction rationnelle de ce paramètre; en d'autres termes, les coordonnées d'un point de la proposée seraient des fonctions rationnelles d'une variable, c'est-à-dire que la proposée serait unicursale, ou de genre zéro, contrairement à l'hypothèse.

Donc enfin, la proposée et la courbe K se correspondent point par point. C. Q. F. D.

Je dis maintenant que la courbe K est du troisième ordre. Coupons-la, en effet, par une droite quelconque $\lambda_1 + \lambda_2\xi + \lambda_3\eta = 0$;

à chacun des points ξ, η, communs à la droite et à la courbe K, répond un (et un seul) point x, y, commun à la proposée et à la courbe

$$(11) \qquad \lambda_1 f_1(x,y) + \lambda_2 f_2(x,y) + \lambda_3 f_3(x,y) = 0,$$

dont l'équation a été obtenue en remplaçant ξ et η par leurs valeurs (10) dans l'équation de la droite. Le nombre des points mobiles communs à la courbe K et à la droite arbitraire considérée, c'est-à-dire le *degré* de K, est donc égal au nombre des points mobiles x, y communs à la courbe (11) et à la proposée, c'est-à-dire à *trois*, puisque les courbes (11) coïncident avec les courbes (9). C. Q. F. D.

Dès lors, K étant d'ordre *trois* et correspondant point par point à la proposée, il résulte du Lemme du n° **253** que :

Toute intégrale abélienne appartenant à une courbe de genre un *est réductible à une intégrale abélienne relative à une cubique; et, par suite* (n° **254**), *à une intégrale elliptique.*

La courbe de genre *un* correspondant point par point à une cubique, il résulte aussi du n° **254** que :

Les coordonnées d'un point d'une courbe de genre un *peuvent s'exprimer rationnellement en fonction d'un paramètre t, et d'un radical $\sqrt{T}$, portant sur un polynome du quatrième degré en t.*

Exemple. — Soit la courbe du quatrième ordre

$$(12) \qquad (x^2 + y^2)^2 = y - ax,$$

qui admet pour points doubles (de rebroussement) les deux points circulaires à l'infini, et qui est, dès lors, de genre *un*. Proposons-nous d'exprimer les coordonnées, x et y, d'un de ses points en fonction de t et de $\sqrt{T}$. A cet effet, considérons les courbes adjointes d'ordre $n - 2$: ce sont des circonférences quelconques; prenons celles qui passent par $n - 3$ points simples de la proposée, par exemple, puisqu'ici $n - 3 = 1$, celles qui passent par l'origine. Leur équation générale est

$$(13) \qquad \lambda_1(x^2 + y^2) + \lambda_2 x + \lambda_3 y = 0.$$

Posons, suivant la théorie générale,

$$(14) \qquad \xi = \frac{x}{x^2+y^2}, \qquad \eta = \frac{y}{x^2+y^2},$$

équations d'où l'on tire, sans même recourir à la relation (12),

$$(15) \qquad x = \frac{\xi}{\xi^2+\eta^2}, \qquad y = \frac{\eta}{\xi^2+\eta^2}.$$

Portons ces valeurs dans (12); nous obtenons l'équation de la cubique décrite par le point ξ, η :

$$(16) \qquad (\eta - a\xi)(\xi^2+\eta^2) = 1.$$

Pour exprimer ξ et η en fonction d'un paramètre t, nous devons couper la cubique par une sécante issue d'un point fixe de cette courbe, par exemple par une parallèle à l'asymptote réelle :

$$(17) \qquad \eta - a\xi = t.$$

Portant dans (16) la valeur de η tirée de (17), nous trouvons l'équation en ξ

$$\xi^2 t(1+a^2) + 2at^2\xi + t^3 - 1 = 0;$$

d'où

$$\xi = \frac{-at^2+\sqrt{t(1+a^2)-t^4}}{t(1+a^2)}, \qquad \eta = \frac{t^2+a\sqrt{t(1+a^2)-t^4}}{t(1+a^2)}.$$

Substituons ces valeurs dans (15), en observant que, d'après (16) et (17), $\xi^2+\eta^2 = \frac{1}{t}$; nous obtenons finalement les expressions demandées de x et y :

$$(1+a^2)x = -at^2+\sqrt{t(1+a^2)-t^4}, \quad (1+a^2)y = t^2+a\sqrt{t(1+a^2)-t^4}.$$

IV. — RÉDUCTION DES INTÉGRALES $\int e^{mx}\frac{P(x)}{Q(x)}dx$.

---

256. Si P et Q sont deux polynomes en x, l'intégrale

$$(18) \qquad \int e^{mx}\frac{P(x)}{Q(x)}dx$$

se ramène, par la décomposition de $\frac{P(x)}{Q(x)}$ en éléments simples, à une somme d'intégrales des deux types

$$(19) \qquad \int x^p e^{mx}\, dx,$$

$$(20) \qquad \int \frac{e^{mx}}{(x-a)^p}\, dx = J_p.$$

On calcule les intégrales du type (19) à l'aide des fonctions élémentaires (n° **234**) ; celles du type (20) donnent lieu aux remarques suivantes.

Appliquons à (20) la formule d'intégration par parties, en regardant $\frac{1}{(x-a)^p}$ comme la dérivée de $-\frac{1}{p-1}\frac{1}{(x-a)^{p-1}}$; il vient

$$\int \frac{e^{mx}}{(x-a)^p}\, dx = -\frac{1}{p-1}\frac{1}{(x-a)^{p-1}} + \frac{m}{p-1}\int \frac{e^{mx}}{(x-a)^{p-1}}\, dx,$$

ce qui ramène J_p à J_{p-1}. On réduit ainsi $J_p, J_{p-1}, \ldots, J_2$ à la seule intégrale J_1,

$$J_1 = \int \frac{e^{mx}}{x-a}\, dx,$$

qu'on peut elle-même simplifier par le changement de variable

$$m(x-a) = t,$$

qui donne

$$J_1 = \int \frac{e^{ma+t}}{t}\, dt = e^{ma} \int \frac{e^t}{t}\, dt.$$

On ramène ainsi toutes les intégrales du type (20) et, par suite, celle du type général (18), à des fonctions élémentaires et à l'intégrale $\int \frac{e^t}{t}\, dt$, qui constitue une transcendante nouvelle.

Si l'on pose $e^t = z$, elle devient

$$\int \frac{dz}{\log z},$$

d'où son nom de *logarithme intégral*.

CHAPITRE III.

INTÉGRALES DÉFINIES.

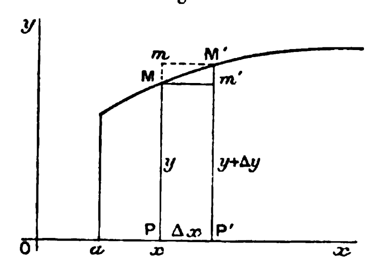
I. — DÉFINITION ET PROPRIÉTÉS DE L'INTÉGRALE DÉFINIE.

257. Nous avons annoncé, au n° **193**, que, si $f(x)$ est une fonction continue entre $x=a$ et $x=b$, il existe une fonction $F(x)$ ayant pour dérivée $f(x)$ pour les valeurs de x comprises dans cet intervalle : c'est le théorème que nous allons maintenant établir en introduisant la notion nouvelle d'intégrale définie.

Pour les anciens analystes, la proposition était évidente.

Qu'on construise, en effet, la courbe $y=f(x)$, et qu'on désigne par $F(x)$ l'aire comprise entre la courbe, l'axe des x, l'ordonnée fixe d'abscisse a est l'ordonnée mobile d'abscisse x; je dis que $F(x)$ aura pour dérivée $f(x)$. En effet, si l'on donne à x l'accroissement Δx, l'accroissement ΔF, de l'aire, sera le trapèze

Fig. 61.



curviligne PMM'P' (*fig.* 61), dont l'aire, comprise entre l'aire $y\,\Delta x$ du rectangle $PMm'P'$ et l'aire $(y+\Delta y)\,\Delta x$ du rectangle $PmM'P'$, a pour expression $(y+\theta\,\Delta y)\,\Delta x$, θ étant compris entre o et 1. On a donc

$$\Delta F = (y+\theta\,\Delta y)\,\Delta x,$$

et cette relation montre que la limite du rapport $\frac{\Delta F}{\Delta x}$, c'est-à-dire la dérivée de $F(x)$, est égale à y, ou $f(x)$.

Mais cette démonstration, dont l'importance historique a été très grande, est loin d'être satisfaisante : 1° parce qu'on y regarde

comme acquise la notion d'aire, qui n'est pas une notion première; 2° parce que, en faisant usage d'un tracé géométrique, on suppose par là même que la courbe $y = f(x)$ satisfait à certaines conditions (continuité, entre autres) qui ne sont pas définies d'une manière précise et qui ne jouent pas un rôle explicite dans le raisonnement. Il est donc indispensable de donner une démonstration purement algébrique.

258. Rappelons d'abord une propriété établie au n° **11** :

Une fonction $f(x)$ continue dans un intervalle fini ab, extrémités comprises, est uniformément continue entre a et b, c'est-à-dire qu'étant donné ε aussi petit qu'on veut, on peut assigner un nombre η (module de continuité uniforme), fonction de ε seul, tel que l'on ait

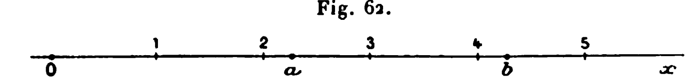
$$\mathrm{mod}[f(x_1) - f(x)] < \varepsilon,$$

pour toutes les valeurs de x et x_1 comprises entre a et b, et dont la différence est, en valeur absolue, inférieure à η.

259. Notion de l'intégrale définie. — Soit une fonction $f(x)$, continue dans l'intervalle ab et aux extrémités de cet intervalle; a et b désignent des nombres finis, et a est supposé inférieur à b.

Sur l'axe des x marquons, à partir de l'origine O, les points

Fig. 62.



d'abscisses entières, $x = \ldots -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots$; subdivisons ensuite chacun des intervalles en deux autres égaux, et ainsi de suite.

A un instant quelconque de cette opération, désignons par $x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{n+1}, \ldots, x_p$ les points de division compris entre a et b, *en allant de a vers b*; soient m_0 le minimum de $f(x)$ entre a et x_1, c'est-à-dire, plus exactement, la plus petite valeur de $f(x)$ entre $x = a$ et $x = x_1$; ...; m_n son minimum entre x_n et x_{n+1}; ...; m_p, entre x_p et b.

Considérons la somme

$$S = m_0(x_1 - a) + m_1(x_2 - x_1) + \ldots + m_n(x_{n+1} - x_n) + \ldots + m_p(b - x_p).$$

Je dis qu'elle tend vers une limite finie et déterminée quand le nombre des points de division augmente indéfiniment suivant la loi indiquée ci-dessus.

En effet, puisque $a < b$, toutes les différences $x_{n+1} - x_n$ sont positives; si donc M désigne le maximum de $f(x)$ entre a et b, il est clair que j'augmente S en remplaçant tous les m par M, de sorte que

$$S < M(x_1 - a + x_2 - x_1 + \ldots + x_{n+1} - x_n + \ldots + b - x_p),$$

c'est-à-dire

$$S < M(b - a).$$

Les sommes S restent donc inférieures à un nombre fini, $M(b-a)$; pour prouver qu'elles ont une limite il suffira d'établir qu'elles vont sans cesse en croissant, ou du moins ne décroissent jamais.

Passons, en effet, d'une division à la suivante : l'intervalle $x_n x_{n+1}$ se trouve subdivisé en deux autres; et si ξ_n est son point milieu, à l'intervalle $x_n x_{n+1}$ correspondent, dans la nouvelle somme S', les deux termes

$$\mu(\xi_n - x_n) + \mu'(x_{n+1} - \xi_n),$$

μ et μ' désignant respectivement les minima de $f(x)$ entre x_n et ξ_n; ξ_n et x_{n+1}. Comme m_n est le minimum entre x_n et x_{n+1}, un des nombres μ, μ' est égal à m_n, l'autre lui est supérieur ou au moins égal; les deux termes $\mu(\xi_n - x_n) + \mu'(x_{n+1} - \xi_n)$ ont donc une somme supérieure ou au moins égale à $m_n(x_{n+1} - x_n)$, c'est-à-dire au terme correspondant de S. Le même raisonnement s'appliquant à tous les termes de S, y compris les deux extrêmes, on voit que la nouvelle somme S' est supérieure ou au moins égale à S, ce qui démontre la proposition.

La limite des sommes S, limite dont l'existence est ainsi établie, se nomme *l'intégrale définie de $f(x)$ entre a et b*, et se représente par le symbole sommatoire

$$\int_a^b f(x)\,dx,$$

qui rappelle son origine.

On suppose essentiellement, jusqu'à nouvel ordre, $a < b$.

260. Corollaires. — 1° Soit c une quantité comprise entre a et b; je dis que

$$(1) \qquad \int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$$

En effet, à un instant quelconque de la division de l'axe des x, désignons par $x_1, x_2, \ldots, x_q$ les points de division compris entre a et c; par $x_{q+1}, \ldots, x_p$ ceux compris entre c et b. Les sommes dont les limites définissent respectivement les trois intégrales de la formule (1) sont, à l'instant considéré,

$$\begin{aligned} S &= m_0(x_1 - a) + \ldots + m_q(x_{q+1} - x_q) + \ldots + m_p(b - x_p), \\ S_1 &= m_0(x_1 - a) + \ldots + m'_q(c - x_q), \\ S_2 &= \qquad\qquad\qquad m''_q(x_{q+1} - c) \;\; + \ldots + m_p(b - x_p); \end{aligned}$$

m_q, m'_q, m''_q étant respectivement les minima de $f(x)$ entre x_q et x_{q+1}, x_q et c, c et x_{q+1}. On en tire

$$S - S_1 - S_2 = m_q(x_{q+1} - x_q) - m'_q(c - x_q) - m''_q(x_{q+1} - c);$$

d'où, si M_0 est le maximum du module de $f(x)$ entre a et b,

$$\text{mod}[S - (S_1 + S_2)] < M_0(x_{q+1} - x_q + c - x_q + x_{q+1} - c),$$

c'est-à-dire

$$< 2M_0(x_{q+1} - x_q);$$

et, comme $x_{q+1} - x_q$ a pour limite zéro, il en est de même de $S - (S_1 + S_2)$, ce qui établit la formule (1).

De même, en supposant

$$a < c < d < e < \ldots < l < b,$$

on a

$$\int_a^b = \int_a^c + \int_c^d + \int_d^e + \ldots + \int_l^b.$$

2° Si M est le maximum et m le minimum de $f(x)$ entre a et b, on augmente la somme S en remplaçant les m_n par M, et on la diminue en les remplaçant par m; donc, en passant à la limite,

$$m(b - a) \leqq \int_a^b f(x)\,dx \leqq M(b - a) \qquad (a < b),$$

ce qu'on écrit

$$\int_a^b f(x)\,dx = \mu(b-a),$$

μ étant intermédiaire entre m et M.

Comme d'ailleurs $f(x)$ est continue, elle prend, entre $x=a$ et $x=b$, la valeur μ, qui est comprise entre son maximum et son minimum (n° 8), de sorte que

$$\int_a^b f(x)\,dx = (b-a)f(\zeta),$$

ζ étant une valeur comprise entre a et b.

261. Définition plus générale de l'intégrale définie. — Supposons toujours $a < b$; sur l'axe des x marquons *arbitrairement*, entre a et b, et en allant de a vers b, des points $x_1, x_2, \ldots, x_p$; et, dans chaque intervalle $x_n x_{n+1}$, prenons un point *arbitraire* ξ_n.

Considérons la somme

$$\sigma = (x_1 - a)f(\xi_0) + (x_2 - x_1)f(\xi_1) + \ldots \\ + (x_{n+1} - x_n)f(\xi_n) + \ldots + (b - x_p)f(\xi_p).$$

Si l'on multiplie le nombre des points de division *suivant une loi quelconque,* de manière que tous les intervalles $x_n x_{n+1}$ tendent vers zéro, je dis que σ a pour limite l'intégrale $\int_a^b f(x)\,dx$, définie tout à l'heure.

Comparons en effet σ à l'intégrale : celle-ci peut s'écrire (n° 260, 1°)

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^{x_1} + \int_{x_1}^{x_2} + \ldots + \int_{x_n}^{x_{n+1}} + \ldots + \int_{x_p}^{b},$$

de sorte que

$$\sigma - \int_a^b f(x)\,dx = \Sigma\left[(x_{n+1} - x_n)f(\xi_n) - \int_{x_n}^{x_{n+1}} f(x)\,dx\right].$$

Or, d'après le n° 260, 2°,

$$\int_{x_n}^{x_{n+1}} f(x)\,dx = (x_{n+1} - x_n)f(\zeta_n),$$

ζ_n étant compris entre x_{n+1} et x_n; de sorte que

$$\sigma - \int_a^b f(x)\,dx = \Sigma(x_{n+1} - x_n)[f(\xi_n) - f(\zeta_n)].$$

Mais la fonction $f(x)$ est continue, et par suite uniformément continue entre a et b; elle a donc, dans cet intervalle, et pour un nombre donné ε, un module de continuité uniforme $\eta(\varepsilon)$. Comme d'ailleurs chacune des subdivisions $x_n x_{n+1}$ tend vers zéro, il arrivera un moment où toutes ces subdivisions seront inférieures à $\eta(\varepsilon)$: alors, en vertu de la définition même de la continuité uniforme, toutes les quantités $f(\xi_n) - f(\zeta_n)$ seront inférieures à ε, en valeur absolue, puisque ξ_n et ζ_n sont compris tous deux dans un intervalle, $x_n x_{n+1}$, inférieur à $\eta(\varepsilon)$.

On aura donc

$$\text{mod}\left[\sigma - \int_a^b f(x)\,dx\right] < \varepsilon\,\Sigma(x_{n+1} - x_n), \quad \text{c'est-à-dire} \quad < \varepsilon(b - a),$$

ce qui prouve bien que σ a pour limite l'intégrale

$$\int_a^b f(x)\,dx. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

262. Extension. — Tout ce qui précède suppose $a < b$; pour $a > b$, on définit l'intégrale $\int_a^b f(x)\,dx$ par la relation

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx,$$

et l'on en déduit que $\int_a^b f(x)\,dx$ est, quel que soit l'ordre de grandeur de a et de b, la limite de la somme

$$(2) \qquad \Sigma(x_{n+1} - x_n) f(\xi_n),$$

où $x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{n+1}, \ldots$ sont des points de division arbitraires entre a et b, écrits dans l'ordre où on les rencontre *en allant de a vers b*. Car si $a < b$, c'est l'énoncé du théorème précédent; si $a > b$, l'intégrale $\int_b^a$ est, d'après ce même théorème, la limite

de $\Sigma(x_n - x_{n+1})f(\xi_n)$, et par suite $\int_a^b$ est la limite de la somme (2), qui est égale et de signe contraire à la précédente.

263. Corollaire I. — On a, quel que soit l'ordre de grandeur de a, b, c,

$$\int_a^b f(x)\,ax = \int_a^c + \int_c^b.$$

Car si $a < c < b$, la proposition a été établie au n° **260**; si l'ordre de grandeur est autre, par exemple si $a < b < c$, on a

$$\int_a^c = \int_a^b + \int_b^c, \qquad \text{d'où} \qquad \int_a^b = \int_a^c - \int_b^c = \int_a^c + \int_c^b.$$

C. Q. F. D.

Corollaire II. — On a de même, en désignant par m le minimum et M le maximum de $f(x)$ entre a et b,

$$m(b-a) \leqq \int_a^b f(x)\,dx \leqq M(b-a),$$

lorsque $a < b$ (n° **260**, 2°).

Au contraire, si $a > b$, en écrivant les mêmes inégalités pour $\int_b^a$ et en changeant les signes, on a

$$m(b-a) \geqq \int_a^b f(x)\,dx \geqq M(b-a),$$

lorsque $a > b$.

Mais, dans tous les cas, l'intégrale est comprise entre $M(b-a)$ et $m(b-a)$, de sorte que

$$\int_a^b f(x)\,dx = \mu(b-a),$$

μ étant intermédiaire entre m et M; c'est ce qu'on nomme le *Théorème de la moyenne*.

On peut écrire aussi, puisque la fonction continue $f(x)$ atteint,

entre a et b, la valeur μ (n° 8),

$$\int_a^b f(x)\,dx = (b-a)f(c),$$

c étant intermédiaire entre a et b.

Corollaire III. — Si, entre a et b, on a

$$\varphi(x) < f(x) < \psi(x),$$

on en déduit, en supposant $a < b$, et par suite $x_{n+1} - x_n > 0$,

$$\varphi(\xi_n)(x_{n+1} - x_n) < f(\xi_n)(x_{n+1} - x_n) < \psi(\xi_n)(x_{n+1} - x_n);$$

d'où, en faisant la somme et passant à la limite,

$$\int_a^b \varphi(x)\,dx < \int_a^b f(x)\,dx < \int_a^b \psi(x)\,dx \qquad (a < b).$$

Si $a > b$ les inégalités seraient renversées.

Corollaire IV. — L'intégrale d'une fonction *impaire* $f(x)$, entre deux limites égales et de signes contraires, est nulle.

En effet, les deux éléments $f(x)\,dx$ et $f(-x)\,dx$ se détruisent, puisque $f(-x) = -f(x)$.

Au contraire, si $f(x)$ est une fonction *paire*, les deux éléments s'ajoutent, et l'on a

$$\int_{-a}^{+a} f(x)\,dx = 2\int_0^a f(x)\,dx.$$

264. Remarque. — Il est indispensable d'observer que l'existence de l'intégrale définie n'est établie qu'à deux conditions; il faut :

1° Que la fonction $f(x)$ soit continue dans le champ d'intégration, c'est-à-dire de a à b, et aussi pour $x = a$, $x = b$.

2° Qu'aucune des limites a et b de l'intégrale ne soit infinie; car on a essentiellement supposé que $M(b-a)$ était fini et que $\varepsilon(b-a)$ avait zéro pour limite quand ε tendait vers zéro. De plus, la continuité uniforme, sur laquelle on s'est appuyé au n° 261, n'existe sûrement que dans un intervalle fini (n° 11).

Si donc on veut étendre la notion d'intégrale définie au cas d'une fonction non continue ou au cas d'un champ infini, une étude nouvelle sera nécessaire.

265. L'intégrale comme fonction de ses limites. — Considérons un point quelconque, y, compris entre a et b; l'intégrale $\int_a^y f(x)\,dx$ est une fonction de y, soit $F(y)$. Je dis que $F(y)$ est continue dans l'intervalle ab et a pour dérivée $f(y)$. En effet, d'après les corollaires I et II du numéro précédent, on a

$$F(y+h)-F(y)=\int_a^{y+h} f(x)\,dx-\int_a^{y} f(x)\,dx=\int_y^{y+h} f(x)\,dx=hf(\eta),$$

η étant intermédiaire entre y et $y+h$. Or $\text{mod} f(x)$ a un maximum, M, quand x reste dans l'intervalle ab, de sorte que l'on a

$$\text{mod}[F(y+h)-F(y)] \leqq Mh,$$

inégalité d'où l'on déduit immédiatement la continuité de $F(y)$.

D'autre part, on peut écrire

$$\frac{F(y+h)-F(y)}{h}=f(\eta);$$

or η est compris entre y et $y+h$, et l'on peut prendre h assez petit, en vertu de la continuité de f, pour que $f(\eta)$ reste compris entre $f(y)-\varepsilon$ et $f(y)+\varepsilon$, ε étant aussi petit que l'on veut : il en résulte, en passant à la limite, qu'on a

$$\lim\left[\frac{F(y+h)-F(y)}{h}\right]_{h=0}=f(y),$$

c'est-à-dire que la dérivée de $F(y)$ est $f(y)$.

Sous une autre forme : *La dérivée de l'intégrale* $\int_a^b f(x)\,dx$ *par rapport à la limite supérieure, b, est $f(b)$; la dérivée par rapport à la limite inférieure, a, est $-f(a)$, car* $\int_a^b = -\int_b^a$.

266. Corollaire. — Toute fonction $f(y)$, continue dans un intervalle ab, est la dérivée, dans le même intervalle, d'une fonction $F(y)$, continue dans cet intervalle.

267. Remarque I. — L'intégrale $\int_a^b f(x)\,dx$ est une fonction de a, de b et des paramètres qui peuvent figurer dans $f(x)$; mais elle n'est pas fonction de la lettre x, par rapport à laquelle on effectue la sommation; de même, la somme Σx^2, étendue aux nombres entiers de n à N, n'est fonction que des limites n et N. Par conséquent, les deux expressions $\int_a^b f(x)\,dx$ et $\int_a^b f(u)\,du$ désignent une même quantité. Souvent on rencontre des intégrales de la forme $\int_a^x f(x)\,dx$: il ne faudra pas oublier que la lettre x joue là deux rôles différents, ce que l'on voit nettement en écrivant l'intégrale $\int_a^x f(u)\,du$.

Remarque II. — Il résulte du corollaire précédent que toute fonction continue a une fonction primitive, tandis qu'elle n'a pas nécessairement une dérivée (n° 12, remarque). Ce fait inattendu mérite d'être signalé.

Remarque III. — Supposons, dans l'intégrale $\int_a^b f(x)\,dx$, que b tende vers a. L'intégrale, en vertu du théorème de la moyenne, est égale à $(b-a)f(c)$, où c est intermédiaire entre a et b : à la limite, $f(c)$ tendant vers $f(a)$, et $(b-a)$ vers zéro, on voit qu'une intégrale dont les limites sont égales est *nulle*. On aurait pu le déduire directement de la définition même de l'intégrale définie.

II. — CALCUL DES INTÉGRALES DÉFINIES.

---

268. Formule fondamentale. — Supposons trouvée une fonction $F(x)$, ayant pour dérivée $f(x)$; d'après le théorème du n° 265, les deux fonctions de b

$$F(b) \quad \text{et} \quad \int_a^b f(x)\,dx,$$

ont même dérivée; elles ne diffèrent donc que d'une constante, en sorte que

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - C.$$

On détermine C en faisant $b = a$: le premier membre étant une intégrale définie à limites égales est nul, et il reste $C = F(a)$. Donc

$$(1) \qquad \int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a),$$

formule fondamentale pour le calcul des intégrales définies.

Si dans cette relation on remplace b par x, on voit que la fonction primitive $F(x)$, c'est-à-dire l'intégrale *indéfinie* $\int f(x)\,dx$, n'est autre chose, à une constante près, que l'intégrale *définie* $\int_a^x f(x)\,dx$, où la limite supérieure est x, et la limite inférieure quelconque. Cette analogie justifie le nom d'*intégrales* donné aux fonctions primitives, et le symbole $\int f(x)\,dx$ adopté précédemment pour ces fonctions.

269. Remarque. — Dans la formule

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a),$$

$F(b)$ et $F(a)$ sont les valeurs que prend, en a et b, une des fonctions $F(x)$ qui ont pour dérivée $f(x)$; la variable x allant de a à b, la fonction $F(x)$ varie, *d'une manière continue* (n° 265), de $F(a)$ à $F(b)$, et il ne peut y avoir dès lors aucune incertitude sur les valeurs à adopter pour ces deux quantités, même dans le cas où $F(x)$ aurait des déterminations multiples.

Exemples. — 1° Soit l'intégrale $\int_a^b \frac{dx}{1+x^2}$; prenons pour $F(x)$, ici arc tang x, la valeur de l'arc tang qui s'annule pour $x = 0$, et faisons varier x de 0 à $\pm\infty$ d'une manière continue : la fonction arc tang x variera d'une manière continue de 0 à $\pm\frac{\pi}{2}$, et par

suite $F(a)$ sera celle des valeurs de arc tang a qui est comprise entre $-\frac{\pi}{2}$ et $+\frac{\pi}{2}$; même résultat pour $F(b)$. Si donc on désigne par le symbole Arc tang un arc compris entre $-\frac{\pi}{2}$ et $+\frac{\pi}{2}$, on aura

$$\int_a^b \frac{dx}{1+x^2} = \text{Arc tang}\, b - \text{Arc tang}\, a.$$

2° De même, étant donnée l'intégrale $\int_a^b \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$, où la réalité exige que a et b soient compris entre -1 et $+1$, la fonction $F(x)$ est arc sin x. Prenons pour $F(x)$ la valeur de l'arc sin qui s'annule pour $x = 0$, et faisons varier x de 0 à ± 1 : $F(x)$ variera de 0 à $\pm\frac{\pi}{2}$, et par suite $F(a)$ et $F(b)$ seront les valeurs de arc sin a et de arc sin b comprises entre $-\frac{\pi}{2}$ et $+\frac{\pi}{2}$. On aura donc, en désignant ces arcs par le symbole Arc sin,

$$\int_a^b \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \text{Arc sin}\, b - \text{Arc sin}\, a.$$

3° Soit à calculer $\int_{-2}^{-1} \frac{dx}{x}$. La fonction $F(x)$ est $\log \pm x$. Si l'on prenait $F(x) = \log x$, entre $x = -2$ et $x = -1$, on aurait pour $\log x$ des valeurs imaginaires. On évitera cette difficulté en prenant $F(x) = \log(-x)$, fonction qui est réelle et déterminée sans ambiguïté dans l'intervalle considéré, et l'on aura alors, en vertu de (1),

$$\int_{-2}^{-1} \frac{dx}{x} = \log 1 - \log 2 = -\log 2.$$

270. Les procédés généraux de calcul indiqués pour les intégrales indéfinies s'appliquent aux intégrales définies. Par exemple, si l'on a

$$f(x) = \varphi(x) + \psi(x) + \ldots,$$

on en déduit évidemment, en vertu de la définition même de

l'intégrale définie,

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b \varphi(x)\,dx + \int_a^b \psi(x)\,dx + \ldots;$$

c'est le procédé de *décomposition en éléments simples*.

De même, la formule d'*intégration par parties* subsiste; car de l'identité

$$(f\varphi)' = f'\varphi + f\varphi'$$

on déduit

$$\int_a^b (f\varphi)'\,dx = \int_a^b f'\varphi\,dx + \int_a^b f\varphi'\,dx.$$

Or le premier membre, en vertu de la formule fondamentale (1), est $f(b)\varphi(b) - f(a)\varphi(a)$, ce que l'on écrit plus simplement $(f\varphi)_a^b$; donc

$$\int_a^b f'\varphi\,dx = (f\varphi)_a^b - \int_a^b f\varphi'\,dx.$$

On établirait de même la formule du changement de variable dans les intégrales définies; mais il est préférable, pour la rigueur, de faire la démonstration en s'appuyant sur la définition même de l'intégrale, plutôt que sur son lien avec l'intégrale indéfinie.

271 Changement de variable. — Dans l'intégrale $\int_a^b f(x)\,dx$, remplaçons x par une nouvelle variable t, en posant

$$x = \varphi(t);$$

il s'agit d'obtenir l'intégrale transformée en t.

Soient α et β les valeurs de t qui correspondent aux valeurs a et b de x; on supposera :

1° *Essentiellement*, que la fonction $\varphi(t)$ et sa dérivée $\varphi'(t)$ sont déterminées et continues dans l'intervalle $\alpha\beta$;

2° *Provisoirement*, que $\varphi'(t)$ garde un signe constant dans le même intervalle.

Faisons maintenant varier t de α à β, en passant par des valeurs successives

$$\alpha, \quad t_1, \quad t_2, \quad \ldots, \quad t_n, \quad t_{n+1}, \quad \ldots, \quad \beta.$$

D'après les hypothèses, $\varphi'(t)$ étant toujours de même signe entre α et β, la fonction $\varphi(t)$, c'est-à-dire x, varie toujours dans le même sens de $\varphi(\alpha)$ à $\varphi(\beta)$, c'est-à-dire de a à b; par suite, aux valeurs ci-dessus de t correspondent, pour x, des valeurs

$$a, \quad x_1, \quad x_2, \quad \ldots, \quad x_n, \quad x_{n+1}, \quad \ldots, \quad b,$$

qui seront rangées par ordre de grandeur croissante ou décroissante, selon que $b > a$ ou $b < a$.

D'ailleurs on a, en vertu du théorème des accroissements finis,

$$x_{n+1} - x_n = \varphi(t_{n+1}) - \varphi(t_n) = (t_{n+1} - t_n)\,\varphi'(\tau_n),$$

τ_n étant compris entre t_n et t_{n+1}. Soit ξ_n la valeur de x qui correspond à $t = \tau_n$; elle sera, d'après ce qui précède, comprise entre x_n et x_{n+1}. Multiplions les deux membres de la relation précédente par $f(\xi_n)$, c'est-à-dire par $f[\varphi(\tau_n)]$, et ajoutons toutes les relations analogues, obtenues en faisant varier n; il vient

$$\Sigma f(\xi_n)(x_{n+1} - x_n) = \Sigma f[\varphi(\tau_n)](t_{n+1} - t_n)\,\varphi'(\tau_n).$$

A la limite, en faisant tendre vers zéro les intervalles $t_{n+1} - t_n$, et par suite les intervalles $x_{n+1} - x_n$, on aura

$$(2) \qquad \int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\,\varphi'(t)\,dt.$$

C'est là la formule du changement de variable; α et β sont les valeurs de t qui correspondent aux valeurs a et b de x.

Affranchissons-nous maintenant de la restriction provisoire relative au signe de $\varphi'(t)$, et supposons, par exemple, que, t allant de α à β, $\varphi'(t)$ change de signe pour les valeurs $t = \gamma$ et $t = \delta$; soient c et d les valeurs correspondantes de x, $c = \varphi(\gamma)$, $d = \varphi(\delta)$.

La formule (2) est applicable dans chacun des intervalles $\alpha\gamma$, $\gamma\delta$ et $\delta\beta$, puisque dans chacun d'eux $\varphi'(t)$ garde un signe

constant; on a donc

$$\int_a^c f(x)\,dx = \int_\alpha^\gamma f[\varphi(t)]\,\varphi'(t)\,dt,$$

$$\int_c^d \cdots\cdots = \int_\gamma^\delta \cdots\cdots\cdots\cdots,$$

$$\int_d^b \cdots\cdots = \int_\delta^\beta \cdots\cdots\cdots\cdots,$$

d'où, en ajoutant, et quel que soit l'ordre de grandeur des quantités a, b, c, d [1] (n° **263**, Corollaire I),

$$(2)\qquad \int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\,\varphi'(t)\,dt.$$

Donc :

Règle. — *Pour faire le changement de variable, remplacer dans l'intégrale x par $\varphi(t)$, dx par $\varphi'(t)\,dt$, et prendre pour nouvelles limites les valeurs de t qui correspondent aux anciennes limites de x.*

272. Il faut, en appliquant cette règle, prendre garde aux valeurs multiples que peuvent avoir parfois t, $\varphi(t)$ ou $\varphi'(t)$ pour une même valeur de x ou de t.

Par exemple, dans l'intégrale $\int_{-1}^{+1} dx$, égale à 2, posons $x = t^{\frac{3}{2}}$. La fonction $\varphi(t) = t^{\frac{3}{2}}$ et sa dérivée, $\frac{3}{2}\sqrt{t}$, étant continues, la règle peut s'appliquer; or, pour $x = \pm 1$, la relation $x^2 = t^3$ donne $t^3 = 1$, c'est-à-dire $t = 1$.

On aurait donc, en appliquant sans discernement la formule (2),

$$\int_{-1}^{+1} dx = \int_1^1 \frac{3}{2}\sqrt{t}\,dt = 0,$$

car la seconde intégrale a ses limites égales.

---

[1] Il peut se faire que les quantités c ou d sortent de l'intervalle ab; pour que la formule (2) soit applicable, il faut que $f(x)$ soit continue, non seulement entre a et b, comme cela doit être, mais entre la plus grande et la plus petite des quantités a, b, c, d. En d'autres termes, $f(x)$ doit être continue pour toutes les valeurs de $x = \varphi(t)$ qui correspondent aux valeurs de t comprises entre α et β.

L'erreur provient de ce que, en écrivant $dx = \frac{3}{2}\sqrt{t}\,dt$, on doit choisir le signe de $\sqrt{t}$ de manière que dx soit positif, puisque x croît de -1 à $+1$. Or, x allant de -1 à 0, t, égal à $(x^2)^{\frac{1}{3}}$, va de 1 à 0, et dt est négatif; on doit donc écrire

$$dx = -\frac{3}{2}\sqrt{t}\,dt,$$

de $t = 1$ à $t = 0$.

Au contraire, x allant de 0 à 1, t va de 0 à 1, et dt est positif; donc

$$dx = +\frac{3}{2}\sqrt{t}\,dt,$$

de $t = 0$ à $t = 1$.

La formule exacte est donc

$$\int_{-1}^{+1} dx = \int_{-1}^{0} dx + \int_{0}^{1} dx$$
$$= -\int_{1}^{0} \frac{3}{2}\sqrt{t}\,dt + \int_{0}^{1} \frac{3}{2}\sqrt{t}\,dt = 3\int_{0}^{1} \sqrt{t}\,dt = \left(2t^{\frac{3}{2}}\right)_0^1 = 2.$$

273. Formule de Wallis. — On fera, dans la suite du Cours, un fréquent usage des procédés de calculs indiqués ci-dessus; aussi se bornera-t-on ici à une seule application.

Considérons l'intégrale

$$I_m = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m x\,dx.$$

On peut écrire, en intégrant par parties,

$$I_m = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{m-1} x (\sin x\,dx)$$
$$= -(\sin^{m-1} x \cos x)_0^{\frac{\pi}{2}} + (m-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{m-2} x \cos^2 x\,dx.$$

Si m est supérieur à 1, le terme tout intégré s'annule aux deux limites; quant à la dernière intégrale, en y remplaçant $\cos^2 x$ par $1 - \sin^2 x$, elle s'écrit $I_{m-2} - I_m$. On a donc

$$I_m = (m-1)(I_{m-2} - I_m),$$

c'est-à-dire

$$(3) \qquad I_m = \frac{m-1}{m} I_{m-2}.$$

Supposons maintenant m entier; cette relation de récurrence permet de ramener I_2, I_4, ..., I_{2p} à I_0; et I_3, I_5, ..., I_{2p+1} à I_1. On a ainsi

$$I_{2p} = \frac{2p-1}{2p}\,\frac{2p-3}{2p-2}\cdots\frac{1}{2}I_0.$$

$$I_{2p+1} = \frac{2p}{2p+1}\,\frac{2p-2}{2p-1}\cdots\frac{2}{3}I_1.$$

Or

$$I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx = \frac{\pi}{2}, \qquad I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,dx = (-\cos x)_0^{\frac{\pi}{2}} = 1.$$

Donc

$$I_{2p} = \frac{1.3.5\ldots(2p-1)}{2.4.6\ldots2p}\,\frac{\pi}{2},$$

$$I_{2p+1} = \frac{2.4.6\ldots2p}{3.5.7\ldots(2p+1)},$$

ce qui donne la valeur de I_m, pour m entier et positif : on peut déduire de là une formule remarquable. Divisons en effet membre à membre les deux dernières relations, il vient

$$(4) \qquad \frac{\pi}{2} = \frac{2.2}{1.3}\,\frac{4.4}{3.5}\,\frac{6.6}{5.7}\cdots\frac{2p.2p}{(2p-1)(2p+1)}\,\frac{I_{2p}}{I_{2p+1}}.$$

Or il est aisé de trouver une limite supérieure et une limite inférieure du rapport $I_{2p} : I_{2p+1}$. En effet, il est clair que les intégrales I_m décroissent quand m augmente, car, x étant compris entre o et $\frac{\pi}{2}$, $\sin x$ est compris entre o et 1, de sorte que l'élément de l'intégrale, $\sin^m x\,dx$, diminue lorsque m croît; donc (n° 263, 3°)

$$I_{2p+1} < I_{2p} < I_{2p-1},$$

c'est-à-dire

$$1 < \frac{I_{2p}}{I_{2p+1}} < \frac{I_{2p-1}}{I_{2p+1}}.$$

Or, en vertu de la formule (3), le dernier rapport est égal à $\frac{2p+1}{2p}$; par suite

$$1 < \frac{I_{2p}}{I_{2p+1}} < 1 + \frac{1}{2p};$$

d'où il résulte que le rapport $\frac{I_{2p}}{I_{2p+1}}$ tend vers 1, pour p infini. La relation (4) donne donc, si l'on passe à la limite,

$$\frac{\pi}{2} = \lim \frac{2.2}{1.3}\,\frac{4.4}{3.5}\,\frac{6.6}{5.7}\cdots\frac{2p.2p}{(2p-1)(2p+1)},$$

lorsque p tend vers l'infini par valeurs entières et positives.

Cette formule remarquable est due à Wallis (1655).

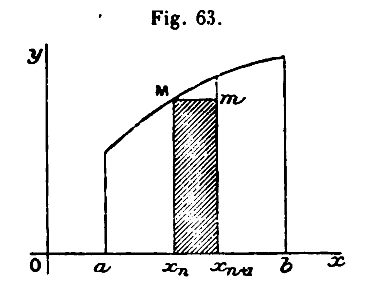
III. — AIRES PLANES ET ARCS DE COURBE.

1° *Aires planes.*

274. On a vu au n° **257** comment les anciens Analystes établissaient une liaison entre les aires planes et les fonctions primitives, ou les intégrales définies; mais on a fait observer à ce propos que la notion d'aire n'est pas une notion première, et il importe avant tout de la préciser.

La Géométrie élémentaire ne définit directement que les aires

Fig. 63.



des figures composées de droites; les aires terminées par des arcs de courbe seront définies comme des limites, de la manière suivante :

Considérons (axes rectangulaires) la courbe $y = f(x)$, et les droites $x = a$, $x = b$; marquons sur Ox, en allant de a vers b, des points x_1, x_2, ..., x_n, ..., x_p : l'aire comprise entre la courbe, l'axe des x et les deux ordonnées extrêmes a et b (*fig.* 63), sera *par définition* la limite (si elle existe) de la somme des aires

des rectangles $x_n M m x_{n+1}$, c'est-à-dire de la somme

$$(\Sigma) \qquad \Sigma(x_{n+1}-x_n)f(x_n),$$

quand toutes les bases des rectangles tendront vers zéro.

Or cette limite existe; c'est précisément (n° **261**) l'intégrale définie $\int_a^b f(x)\,dx$: en d'autres termes, au lieu d'admettre avec Newton l'existence *a priori* de l'aire et d'y rattacher l'intégrale, on définit l'aire par l'intégrale, l'existence de celle-ci ayant été préalablement établie par l'analyse.

Les deux méthodes conduisent à la même conclusion : l'aire considérée ci-dessus a pour valeur $\int_a^b f(x)\,dx$, en observant toutefois que l'élément $(x_{n+1}-x_n)f(x_n)$ de la somme (Σ) a le signe $+$, lorsque $(x_{n+1}-x_n)$ et $f(x_n)$ sont de même signe, et le signe $-$ dans le cas contraire. En d'autres termes, si $a<b$, les parties de l'aire situées *au-dessus de* Ox, correspondant à $f(x_n)>0$, sont comptées *positivement*, et celles situées *au-dessous, négativement;* le contraire a lieu si $a>b$.

Si la courbe est donnée sous forme paramétrique, $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$, l'aire comprise entre la courbe, l'axe des x et les deux ordonnées qui correspondent aux valeurs t_0 et t_1 du paramètre est

$$\int_{t_0}^{t_1} y\frac{dx}{dt}\,dt=\int_{t_0}^{t_1}\psi(t)\varphi'(t)\,dt.$$

275. Si l'on a à calculer l'aire d'une portion *quelconque* du plan, on la divise en aires partielles, telles que le contour de chaque aire soit rencontré en deux points, au plus, par toute parallèle à Oy.

Soient alors $y_1(x)$ et $y_2(x)$ (*fig.* 64) les coordonnées des deux points où le contour C de l'aire est coupé par la droite $X=x$, $(y_2>y_1)$; a et b les abscisses des parallèles extrêmes à Oy qui rencontrent le contour.

L'aire enveloppée par le contour C est la différence des deux aires aAMBb et aANBb; elle a donc pour valeur

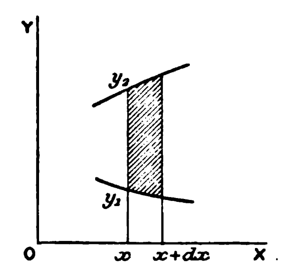
$$A=\int_a^b y_2\,dx-\int_a^b y_1\,dx=\int_a^b(y_2-y_1)\,dx.$$

On aurait pu l'écrire directement, en observant que $(y_2 - y_1)\,dx$

Fig. 64.

est évidemment la valeur principale de l'aire ombrée (*fig.* 65)

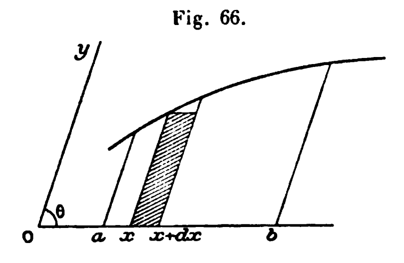
Fig. 65.



comprise entre le contour et les droites $X = x$, $X = x + dx$.

276. Axes non rectangulaires. — Si les axes de coordonnées font (*fig.* 66) un angle θ, l'aire comprise entre la courbe $y = f(x)$,

Fig. 66.



l'axe des x et les deux droites $x = a$, $x = b$ sera

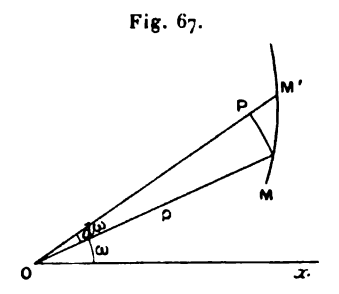
$$\sin\theta \int_a^b y\,dx,$$

car le parallélogramme ombré a pour aire

$$\sin\theta\, y\, dx.$$

277. Coordonnées polaires. — Soit $\rho = f(\omega)$ une courbe; l'aire OMM′ (*fig.* 67), comprise entre un arc MM′ de cette courbe

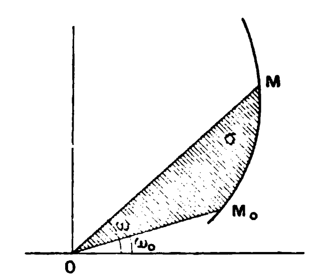
Fig. 67.



et les deux rayons vecteurs qui font avec Ox les angles ω et $\omega + d\omega$, a pour valeur principale l'aire du secteur circulaire OMP, c'est-à-dire $\frac{1}{2}\rho^2 d\omega$: car la partie négligée, l'aire MPM′, est évidemment du second ordre par rapport à $d\omega$.

Ainsi, en appelant σ (*fig.* 68) l'aire comprise entre la courbe,

Fig. 68.



un rayon vecteur fixe OM_0, d'angle polaire ω_0, et un rayon vecteur mobile OM, d'angle polaire ω, on a

$$d\sigma = \frac{1}{2}\rho^2 d\omega,$$

d'où

(1) $$\sigma = \frac{1}{2}\int_{\omega_0}^{\omega} \rho^2 d\omega.$$

car les deux membres, ayant même différentielle par rapport à la variable indépendante ω, ne diffèrent que d'une constante; celle-ci est nulle, puisque σ et l'intégrale s'annulent pour $\omega = \omega_0$.

Exemples.

278. Ellipse. — L'aire ombrée (*fig.* 69), comprise entre les axes Ox, Oy, l'ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$, et la parallèle à Oy d'abscisse x, est

$$\text{(2)} \qquad A = \int_0^x y\,dx = \frac{b}{a}\int_0^x \sqrt{a^2 - x^2}\,dx.$$

On a ainsi à intégrer un radical de la forme $\sqrt{\alpha x^2 + 2\beta x + \gamma}$: on pourrait appliquer la méthode générale du n° 213; il sera plus simple de suivre la méthode de réduction des intégrales hyperellip-

Fig. 69.

tiques (n° 242). On a ainsi, en faisant passer le radical au dénominateur,

$$\text{(3)} \quad \int \sqrt{a^2 - x^2}\,dx = \int \frac{a^2 - x^2}{\sqrt{a^2 - x^2}}\,dx = a^2\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} - \int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}.$$

Au dernier membre, la première intégrale est (n° 194)

$$a^2 \operatorname{Arc\,sin} \frac{x}{a};$$

pour réduire la seconde, partons de l'identité

$$(x\sqrt{a^2 - x^2})' = \sqrt{a^2 - x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \frac{a^2 - 2x^2}{\sqrt{a^2 - x^2}},$$

d'où, en intégrant,

$$x\sqrt{a^2 - x^2} = a^2\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} - 2\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{a^2 - x^2}},$$

c'est-à-dire

$$(4)\qquad -\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \frac{1}{2}x\sqrt{a^2-x^2} - \frac{a^2}{2}\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}.$$

Donc finalement, en portant cette valeur dans (3),

$$(5)\qquad \int \sqrt{a^2-x^2}\,dx = \frac{a^2}{2}\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} + \frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2},$$

et par suite, d'après (2),

$$\mathrm{A} = \frac{b}{2a}\left(a^2 \operatorname{Arc\,sin}\frac{x}{a} + x\sqrt{a^2-x^2}\right)_0^x = \frac{b}{2a}\left(a^2 \operatorname{Arc\,sin}\frac{x}{a} + x\sqrt{a^2-x^2}\right).$$

Le second terme de A est l'aire du triangle OMP; donc le premier terme,

$$\frac{ab}{2}\operatorname{Arc\,sin}\frac{x}{a},$$

est l'aire du secteur elliptique BOM.

L'aire du premier quadrant, OBA, de l'ellipse s'obtient en faisant, dans A, $x = a$; on a ainsi

$$\text{aire OBA} = \frac{\pi ab}{4},$$

formule bien connue.

279. Remarque. — On aurait pu calculer l'intégrale

$$\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx$$

par une voie plus courte, en posant $x = a \sin t$; d'où

$$\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx = a^2\int \cos^2 t\,dt = \frac{a^2}{2}\int (1+\cos 2t)\,dt$$
$$= \frac{a^2}{2}\left(t + \frac{1}{2}\sin 2t\right) = \frac{a^2}{2}(t + \sin t\cos t),$$

et, en remplaçant t par $\operatorname{arc\,sin}\frac{x}{a}$, $\sin t$ par $\frac{x}{a}$, $\cos t$ par $\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}$,

$$= \frac{a^2}{2}\operatorname{arc\,sin}\frac{x}{a} + \frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2},$$

comme on l'a trouvé plus haut (5).

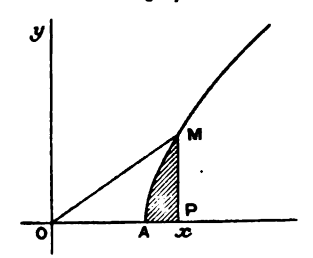
280. Hyperbole. — L'aire du segment AMP (*fig.* 70), compris entre l'hyperbole $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, l'axe transverse et l'ordonnée MP d'abscisse x, a pour expression

$$A = \int_a^x y\,dx = \frac{b}{a}\int_a^x \sqrt{x^2 - a^2}\,dx.$$

Appliquons encore, pour calculer cette intégrale, la méthode de réduction, en écrivant d'abord

$$\int \sqrt{x^2 - a^2}\,dx = \int \frac{x^2 - a^2}{\sqrt{x^2 - a^2}}\,dx = -a^2 \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} + \int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{x^2 - a^2}}.$$

Fig. 70.



Au premier membre, la première intégrale est (n° 194)

$$\log\left(x + \sqrt{x^2 - a^2}\right);$$

pour réduire la seconde, partons de l'identité

$$\left(x\sqrt{x^2 - a^2}\right)' = \sqrt{x^2 - a^2} + \frac{x^2}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \frac{2x^2 - a^2}{\sqrt{x^2 - a^2}},$$

d'où

$$x\sqrt{x^2 - a^2} = 2\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} - a^2 \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}}.$$

On en conclut comme plus haut la formule, analogue à (5),

$$(6) \qquad \int \sqrt{x^2 - a^2}\,dx = -\frac{a^2}{2}\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} + \frac{1}{2}x\sqrt{x^2 - a^2},$$

ce qui donne, en multipliant par $\frac{b}{a}$, et prenant l'intégrale entre a et x,

$$A = \frac{b}{2a}\left(x\sqrt{x^2 - a^2} - a^2 \log\frac{x + \sqrt{x^2 - a^2}}{a}\right).$$

On peut observer que le premier terme de A est l'aire du triangle OMP; donc le second terme, changé de signe,

$$\frac{ab}{2}\log\frac{x+\sqrt{x^2-a^2}}{a},$$

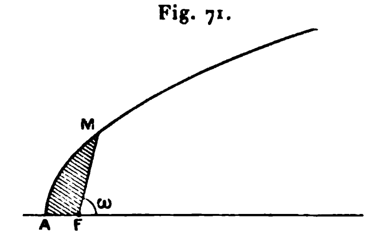
est l'aire du triangle curviligne OAM.

281. Parabole. — La parabole, rapportée à son foyer, F, et à son axe, a pour équation, en coordonnées polaires,

$$\rho = \frac{p}{1-\cos\omega};$$

l'aire ombrée FAM (*fig.* 71), comprise entre la courbe, le rayon

Fig. 71.



vecteur FA du sommet et le rayon vecteur FM, d'angle polaire ω, a pour valeur, d'après la formule $\int \frac{1}{2}\rho^2\,d\omega$ du nº 277,

$$A = \frac{p^2}{2}\int_\omega^\pi \frac{d\omega}{(1-\cos\omega)^2} = \frac{p^2}{2}\int_\omega^\pi \frac{d\omega}{4\sin^4\frac{\omega}{2}}.$$

On a à intégrer une fonction paire de $\sin\frac{\omega}{2}$; on posera donc (nº 230, 1º)

$$\tang\frac{\omega}{2} = t, \qquad \omega = 2\operatorname{arc\,tang} t, \qquad d\omega = \frac{2\,dt}{1+t^2},$$

d'où

$$\int \frac{d\omega}{\sin^4\frac{\omega}{2}} = \int \frac{2\,dt}{1+t^2}\,\frac{(1+t^2)^2}{t^4}$$

$$= 2\int \frac{1+t^2}{t^4}\,dt = -\frac{2}{3t^3} - \frac{2}{t} = -\frac{2}{3}\,\frac{3\tang^2\frac{\omega}{2}+1}{\tang^3\frac{\omega}{2}};$$

ce qui donne finalement

$$A = \frac{p^2}{12} \frac{3 \tang^2 \frac{\omega}{2} + 1}{\tang^2 \frac{\omega}{2}}.$$

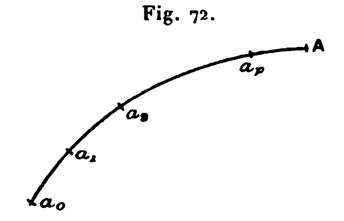
2° *Arcs de courbe.*

282. Courbes planes. — Soit une courbe plane, définie paramétriquement, en coordonnées rectangulaires, par

$$x = \varphi(t), \qquad y = \psi(t);$$

considérons deux points a_0 et A de cette courbe, correspondant aux valeurs t_0 et T du paramètre, et supposons que les fonctions $\varphi(t)$ et $\psi(t)$ soient continues dans l'intervalle t_0T, extrémités

Fig. 72.



comprises, ainsi que leurs dérivées premières. Admettons de plus qu'à un point de la courbe, entre a_0 et A, ne réponde qu'une valeur du paramètre t : il en résulte que, si t varie d'une manière continue et toujours dans le même sens de t_0 à T, le point correspondant de la courbe va, d'une manière continue et toujours dans le même sens, de a_0 à A.

Cela posé, marquons sur la courbe, en allant de a_0 vers A, des points arbitraires $a_1, a_2, \ldots, a_p$; je dis que le périmètre du polygone $a_0 a_1 a_2 \ldots a_p$A tend vers une limite déterminée, quand le nombre des côtés de ce polygone augmente indéfiniment, chacun d'eux tendant vers zéro.

Soit en effet t_n la valeur de t qui correspond au sommet a_n ; le côté $a_n a_{n+1}$ a pour longueur

$$\overline{a_n a_{n+1}} = \sqrt{[\varphi(t_{n+1}) - \varphi(t_n)]^2 + [\psi(t_{n+1}) - \psi(t_n)]^2},$$

c'est-à-dire, d'après le théorème des accroissements finis, en

désignant par θ et τ deux valeurs comprises entre t_n et t_{n+1},

$$\overline{a_n a_{n+1}} = (t_{n+1} - t_n)\sqrt{\varphi'^2(\theta) + \psi'^2(\tau)}.$$

Si θ était constamment égal à τ, la somme $\Sigma\overline{a_n a_{n+1}}$ aurait pour limite (n° 261) l'intégrale définie

$$(1) \qquad \int_{t_0}^{T} \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)}\,dt;$$

nous allons montrer que telle est en effet la limite, quels que soient θ et τ entre t_n et t_{n+1}, en admettant, bien entendu, que $\varphi'(t)$ et $\psi'(t)$ soient continues de $t = t_0$ à $t = T$.

L'intégrale (1) étant la limite de la somme

$$\Sigma(t_{n+1} - t_n)\sqrt{\varphi'^2(\theta) + \psi'^2(\theta)},$$

tout revient à prouver que la différence

$$\delta = \Sigma(t_{n+1} - t_n)\sqrt{\varphi'^2(\theta) + \psi'^2(\tau)} - \Sigma(t_{n+1} - t_n)\sqrt{\varphi'^2(\theta) + \psi'^2(\theta)}$$

a pour limite zéro. On peut écrire cette différence

$$(2) \qquad \delta = \Sigma(t_{n+1} - t_n)\left[\sqrt{\varphi'^2(\theta) + \psi'^2(\tau)} - \sqrt{\varphi'^2(\theta) + \psi'^2(\theta)}\right].$$

La fonction $\psi'^2(t)$ étant continue entre t_0 et T, est uniformément continue dans cet intervalle et admet, pour tout nombre ε, un module de continuité uniforme $\eta(\varepsilon)$: si donc les différences $t_{n+1} - t_n$ sont, en valeur absolue, inférieures à $\eta(\varepsilon)$, on aura

$$\operatorname{mod}[\psi'^2(\tau) - \psi'^2(\theta)] < \varepsilon,$$

ou, sous une autre forme,

$$\psi'^2(\tau) = \psi'^2(\theta) + k\varepsilon,$$

k étant compris entre -1 et $+1$; par suite

$$(3) \qquad \begin{cases} \sqrt{\varphi'^2(\theta) + \psi'^2(\tau)} - \sqrt{\varphi'^2(\theta) + \psi'^2(\theta)} \\ = \sqrt{\varphi'^2(\theta) + \psi'^2(\theta) + k\varepsilon} - \sqrt{\varphi'^2(\theta) + \psi'^2(\theta)}. \end{cases}$$

Or on a évidemment, en désignant $\varphi'^2(\theta) + \psi'^2(\theta)$ par A,

$$\sqrt{A + k\varepsilon} < \sqrt{A} + \sqrt{k\varepsilon},$$

si $k > 0$;

$$\sqrt{A} < \sqrt{A + k\varepsilon} + \sqrt{-k\varepsilon},$$

si $k < 0$: il suffit, pour vérifier ces inégalités, d'élever au carré les deux membres de chacune d'elles. Il vient donc, dans tous les cas,

$$\operatorname{mod}(\sqrt{A + k\varepsilon} - \sqrt{A}) \leqq \sqrt{\operatorname{mod} k\varepsilon},$$

c'est-à-dire

$$\operatorname{mod}\left[\sqrt{\varphi'^2(\theta) + \psi'^2(\theta) + k\varepsilon} - \sqrt{\varphi'^2(\theta) + \psi'^2(\theta)}\right] \leqq \sqrt{\operatorname{mod} k\varepsilon} \leqq \sqrt{\varepsilon}.$$

En vertu de (2) et de (3) on a alors :

$$\operatorname{mod}\delta \leqq \sqrt{\varepsilon}\,\Sigma(t_{n+1} - t_n), \qquad \text{c'est-à-dire} \qquad \leqq \sqrt{\varepsilon}(T - t_0),$$

et par suite δ a bien pour limite zéro.

Donc le périmètre du polygone $a_0 a_1 a_2 \ldots A$ a une limite déterminée, qui est l'intégrale (1), et cette limite se nomme la *longueur de l'arc* $a_0 A$. Ainsi

$$(4) \qquad \operatorname{arc} a_0 A = \int_{t_0}^{T} \sqrt{x_t'^2 + y_t'^2}\, dt.$$

283. Expressions diverses de l'arc. — Soit s l'arc de courbe ; supposons que l'on prenne pour t l'abscisse x, ce qui donne

$$x'_t = 1, \qquad y'_t = y'_x,$$

on aura

$$s = \int_{x_0}^{X} \sqrt{1 + y_x'^2}\, dx,$$

x_0 et X étant les abscisses des deux extrémités de l'arc : mais, d'après le n° **282**, il faut, pour que la formule s'applique, que l'ordonnée y de l'arc considéré n'ait qu'une valeur pour toute valeur de x comprise entre x_0 et X, c'est-à-dire que l'arc n'admette pas de tangente parallèle à Oy.

De même, si $t = y$,

$$s = \int_{y_0}^{Y} \sqrt{1 + x_y'^2}\, dy.$$

En coordonnées polaires, on a :

$$x = \rho \cos\omega, \qquad y = \rho \sin\omega,$$

ρ étant une fonction donnée de ω, $\rho(\omega)$. Si nous supposons $t = \omega$,

nous aurons

$$x'(\omega) = \rho'(\omega)\cos\omega - \rho\sin\omega, \qquad y'(\omega) = \rho'(\omega)\sin\omega + \rho\cos\omega,$$

d'où, pour l'expression (4) de l'arc,

$$s = \int_{\omega_0}^{\Omega} \sqrt{\rho^2 + \rho'^2_\omega}\, d\omega,$$

ω_0 et Ω étant les angles polaires des extrémités de l'arc.

284. Courbes gauches. — Pour une courbe gauche définie paramétriquement,

$$x = x(t), \qquad y = y(t), \qquad z = z(t),$$

on établirait de même sans difficulté que l'arc, considéré comme limite du périmètre d'un polygone inscrit, a pour expression

$$s = \int_{t_0}^{t} \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}\, dt,$$

t_0 et t étant les paramètres des extrémités de l'arc; ce qu'on écrit aussi

$$s = \int_{t_0}^{t} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}\, dt.$$

Dérivons par rapport à la limite supérieure t, de l'intégrale; il vient (n° 265)

$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2},$$

d'où, pour la *différentielle de l'arc,*

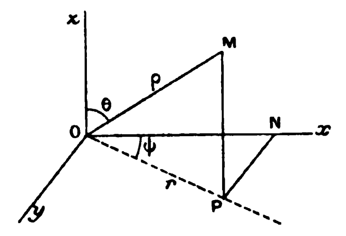
$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2},$$

c'est-à-dire que la valeur principale, ds, d'un arc infiniment petit est la même que celle de la corde, comme on l'a déjà vu pour une courbe plane au n° 54.

285. Coordonnées polaires et semi-polaires de l'espace. — *Les coordonnées polaires* d'un point M (*fig.* 73) sont la distance

$OM = \rho$; l'angle θ du rayon OM avec Oz, angle variable de o à π; l'angle ψ que fait la projection, OP, de ce rayon, sur le

Fig. 73.



plan des xy, axec l'axe Ox, angle variable de o à 2π. On a évidemment, x, y, z étant les coordonnées cartésiennes de M,

$$x = \rho \sin\theta \cos\psi, \qquad y = \rho \sin\theta \sin\psi, \qquad z = \rho \cos\theta.$$

On en déduit dx, dy, dz en $d\rho$, $d\theta$, $d\psi$, d'où l'on conclut, par un calcul facile,

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = d\rho^2 + \rho^2\, d\theta^2 + \rho^2 \sin^2\theta\, d\psi^2.$$

Les *coordonnées semi-polaires* du point M sont

$$z = MP, \qquad OP = r,$$

et l'angle ψ; on a ainsi

$$x = r\cos\psi, \qquad y = r\sin\psi, \qquad z = z,$$

d'où

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = dr^2 + r^2\, d\psi^2 + dz^2.$$

Il importe d'observer que ρ et r désignent des quantités essentiellement positives.

Exemples.

286. Parabole.

$$y^2 = 2px.$$

En prenant y pour variable indépendante, l'arc est donné par l'intégrale

$$s = \int \sqrt{1 + x'^2}\, dy = \frac{1}{p}\int \sqrt{y^2 + p^2}\, dy.$$

L'intégrale $\mathrm{I} = \int \sqrt{y^2 + p^2}\, dy$ a été calculée à propos de l'aire de l'hyperbole; il suffit de changer a^2 en $-p^2$ dans la formule (6) du n° **280**, ce qui donne

$$\mathrm{I} = \frac{1}{2} y \sqrt{y^2 + p^2} + \frac{1}{2} p^2 \int \frac{dy}{\sqrt{y^2 + p^2}};$$

d'où, pour l'arc s, en remplaçant l'intégrale qui figure au second membre de I par sa valeur (n° **194**),

$$s = \frac{1}{p}\mathrm{I} = \frac{y}{2p}\sqrt{y^2 + p^2} + \frac{1}{2} p \log\left(y + \sqrt{y^2 + p^2}\right) + \text{const.}$$

Si l'arc est compté à partir du sommet, s est nul pour $y = 0$; la constante est donc égale à $-\frac{1}{2} p \log p$, et finalement

$$s = \frac{y}{2p}\sqrt{y^2 + p^2} + \frac{1}{2} p \log \frac{y + \sqrt{y^2 + p^2}}{p}.$$

287. Ellipse. — L'ellipse est définie paramétriquement par

$$x = a \cos t,$$
$$y = b \sin t;$$

d'où, en dérivant par rapport au paramètre t,

$$x' = -a \sin t,$$
$$y' = b \cos t.$$

L'arc est donné par

$$s = \int \sqrt{x'^2 + y'^2}\, dt = \int \sqrt{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t}\, dt.$$

On aura toute la courbe en faisant varier t de 0 à 2π; donc la longueur totale de l'ellipse est

$$\int_0^{2\pi} \sqrt{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t}\, dt, \quad \text{ou} \quad 2\int_0^{\pi} \sqrt{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t}\, dt.$$

On peut encore mettre la valeur précédente de l'arc s sous la forme

$$s = \int \sqrt{a^2 - c^2 \cos^2 t}\, dt,$$

en posant, comme d'ordinaire, $c^2 = a^2 - b^2$.

C'est là une *intégrale elliptique,* car si l'on prend $\cos t$ pour variable, en posant

$$\cos t = u, \qquad t = \arc\cos u, \qquad dt = \frac{du}{\sqrt{1-u^2}},$$

on a

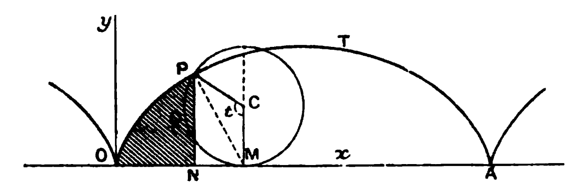
$$s = \int \frac{\sqrt{a^2 - c^2 u^2}}{\sqrt{1-u^2}}\,du = \int \frac{(a^2 - c^2u^2)\,du}{\sqrt{(1-u^2)(a^2-c^2u^2)}}.$$

On ne peut donc exprimer l'arc d'ellipse à l'aide des fonctions élémentaires.

288. Cycloïde. — C'est la courbe décrite par un point d'un cercle, de rayon a, qui roule, sans glisser, sur une droite.

Supposons que cette droite soit l'axe des x (*fig.* 74), et que

Fig. 74.



l'origine, O, soit la position du point décrivant P, au moment où celui-ci se trouve sur l'axe de x : d'après les conditions du mouvement, on aura à chaque instant

$$\text{arc MQP} = \text{OM}.$$

Si donc t est l'angle MCP, on aura, pour les coordonnées x et y du point P, en projetant le contour OMCPO sur Ox et sur Oy,

$$x = \text{OM} - \text{CP}\sin t = a(t - \sin t),$$
$$y = \text{CM} - \text{CP}\cos t = a(1 - \cos t),$$

d'où l'on tire

$$x_t'^2 + y_t'^2 = a^2(2 - 2\cos t).$$

L'arc OP est donc donné par

$$s = \int_0^t \sqrt{2a^2(1-\cos t)}\,dt = \int_0^t 2a \sin\frac{t}{2}\,dt = \left(-4a\cos\frac{t}{2}\right)_0^t,$$

c'est-à-dire

$$s = 4a\left(1 - \cos\frac{t}{2}\right),$$

car la valeur de t qui répond au point O est $t = 0$.

La longueur de la boucle OTA s'obtient en faisant $t = 2\pi$; c'est donc $8a$, c'est-à-dire huit fois le rayon du cercle générateur.

L'aire ombrée, comprise entre la cycloïde, l'axe Ox et l'ordonnée du point P, est

$$A = \int y\,dx = a^2 \int_0^t (1 - \cos t)^2\,dt = a^2\left(t - 2\sin t + \frac{t}{2} + \frac{1}{4}\sin 2t\right)_0^t,$$

c'est-à-dire

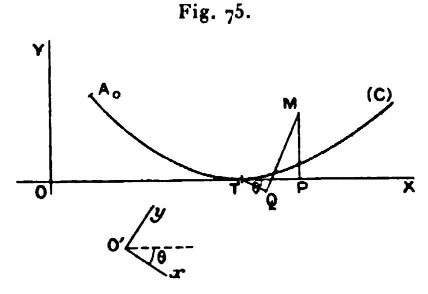
$$A = a^2\left(\frac{3}{2}t - 2\sin t + \frac{1}{4}\sin 2t\right).$$

L'aire de la boucle OTA s'obtient pour $t = 2\pi$; c'est donc $3\pi a^2$, c'est-à-dire trois fois l'aire du cercle générateur, comme Galilée l'avait découvert expérimentalement en pesant les deux aires.

289. Roulettes. — On nomme *roulette* la courbe engendrée par un point, lié invariablement à une courbe qui roule sans glisser sur une courbe fixe. Nous supposerons que la *courbe fixe est une droite,* et nous chercherons l'équation de la roulette.

Prenons la droite fixe pour axe des X et une origine O (*fig.* 75)

Fig. 75.



quelconque. Figurons la courbe roulante (C) dans une de ses positions; soient T le point de contact avec l'axe, M le point qui décrit la roulette. Marquons sur (C) à partir de T, en allant dans le sens TO, un point A_0 tel que arc $TA_0 = TO$; ce point A_0 est un point déterminé de la courbe (C), car, en vertu de l'hypothèse du roulement sans glissement, c'est le point qui était en O

alors que O était le point de contact de la courbe roulante et de OX.

Soient maintenant $O'x$ et $O'y$ deux axes rectangulaires liés invariablement à la courbe roulante, et soient, *par rapport à ces axes :*

α et β les coordonnées fixes du point M; x et y celles, variables, du point T, qui est le point de contact de la courbe et de la droite à l'instant considéré; x et y sont liés par l'équation de la courbe roulante rapportée aux axes $O'x$ et $O'y$: on peut les supposer exprimées en fonction connue d'un paramètre t, $x = x(t), y = y(t)$;

s la longueur de l'arc A_0T : on a vu que $s = OT$;

θ l'angle de la tangente TX avec l'axe $O'x$.

Menons MQ parallèle à $O'y$; TQ parallèle à $O'x$, et projetons la ligne TQM sur les axes (rectangulaires) OX et OY; il vient, en grandeur et signe,

$$\begin{aligned} TP &= TQ\cos\theta + QM\sin\theta = (\alpha - x)\cos\theta + (\beta - y)\sin\theta, \\ PM &= -TQ\sin\theta + QM\cos\theta = -(\alpha - x)\sin\theta + (\beta - y)\cos\theta; \end{aligned}$$

c'est-à-dire, en appelant X et Y les coordonnées de M par rapport aux axes fixes OX et OY,

$$(1)\quad \begin{cases} TP = X - OT = X - s = (\alpha - x)\cos\theta + (\beta - y)\sin\theta. \\ PM = Y = -(\alpha - x)\sin\theta + (\beta - y)\cos\theta. \end{cases}$$

D'ailleurs on a (n° 56)

$$\begin{aligned} dx &= ds\cos\theta, \\ dy &= ds\sin\theta, \end{aligned}$$

ou, en divisant par dt,

$$x'_t = \frac{ds}{dt}\cos\theta, \qquad y'_t = \frac{ds}{dt}\sin\theta,$$

ce qui donne

$$(2)\quad \frac{ds}{dt} = \sqrt{x'^2 + y'^2}, \qquad \cos\theta = \frac{x'}{\sqrt{x'^2 + y'^2}}, \qquad \sin\theta = \frac{y'}{\sqrt{x'^2 + y'^2}},$$

les trois radicaux ayant le même signe, ce qu'il est important d'observer.

En portant ces valeurs de $\cos\theta$ et $\sin\theta$ dans (1), on a

$$X = s + \frac{(\alpha - x)x' + (\beta - y)y'}{\sqrt{x'^2 + y'^2}}, \qquad Y = \frac{-(\alpha - x)y' + (\beta - y)x'}{\sqrt{x'^2 + y'^2}},$$

ou, finalement, en remplaçant s par $\int^t \frac{ds}{dt}\,dt$, et $\frac{ds}{dt}$ par sa valeur (2),

$$(3)\qquad \begin{cases} X = \dfrac{(\alpha - x)x' + (\beta - y)y'}{\sqrt{x'^2 + y'^2}} + \displaystyle\int^t \sqrt{x'^2 + y'^2}\,dt, \\ Y = \dfrac{-(\alpha - x)y' + (\beta - y)x'}{\sqrt{x'^2 + y'^2}}. \end{cases}$$

Il est inutile de fixer la limite inférieure de l'intégrale qui figure dans X, car cela revient à ne déterminer X qu'à une constante près, c'est-à-dire à déplacer la roulette parallèlement à l'axe des X.

Les formules (3), *où les trois radicaux ont le même signe*, le signe + par exemple, donnent les expressions des coordonnées X, Y du point M en fonction d'un paramètre t; la roulette est donc paramétriquement déterminée. Dans ces formules, $x(t)$ et $y(t)$ désignent les coordonnées d'un point quelconque de la courbe roulante par rapport à des axes liés à cette courbe et sont, par suite, des fonctions connues du paramètre t.

290. Applications. — 1° *Cycloïde allongée ou raccourcie.* C'est la roulette décrite par un point lié à une circonférence roulante; elle est dite *cycloïde allongée* ou *raccourcie* selon que le point générateur est extérieur ou intérieur à la circonférence.

Les équations paramétriques de la circonférence étant

$$x = R\cos t, \qquad y = R\sin t,$$

remplaçons x et y par ces valeurs dans (3); il vient

$$\begin{aligned} X &= -(\alpha - R\cos t)\sin t + (\beta - R\sin t)\cos t + Rt = \beta\cos t - \alpha\sin t + Rt, \\ Y &= -(\alpha - R\cos t)\cos t - (\beta - R\sin t)\sin t = R - \beta\sin t - \alpha\cos t. \end{aligned}$$

On peut, sans diminuer la généralité, supposer α ou β nul.

Si le point générateur est sur la circonférence, on fera $\beta = 0$, $\alpha = R$, et l'on retrouvera les formules paramétriques qui correspondent à la cycloïde.

Arc de la cycloïde raccourcie. — On a, en supposant $\beta = 0$ dans les formules précédentes,

$$x = Rt - \alpha \sin t, \qquad y = R - \alpha \cos t,$$

d'où l'on tire dx et dy en fonction de t et dt, ce qui donne :

$$ds^2 = dt^2[(R - \alpha\cos t)^2 + \alpha^2 \sin^2 t] = dt^2(R^2 + \alpha^2 - 2\alpha R \cos t),$$

et, en remplaçant $\cos t$ par $\cos^2 \frac{t}{2} - \sin^2 \frac{t}{2}$,

$$ds = dt\sqrt{(R - \alpha)^2 \cos^2 \frac{t}{2} + (R + \alpha)^2 \sin^2 \frac{t}{2}}.$$

Posons $\frac{t}{2} = \varphi$; nous obtenons

$$ds = 2d\varphi \sqrt{(R - \alpha)^2 \cos^2 \varphi + (R + \alpha)^2 \sin^2 \varphi}.$$

C'est une intégrale elliptique de même forme que celle qui donne l'arc d'ellipse; l'arc de cycloïde raccourcie ou allongée s'exprime donc par un arc d'ellipse.

L'arc qui répond à un tour complet de la circonférence génératrice s'obtient en faisant varier l'angle t de 0 à 2π et, par suite, φ de 0 à π; cet arc est donc

$$2\int_0^{\pi} \sqrt{(R - \alpha)^2 \cos^2 \varphi + (R + \alpha)^2 \sin^2 \varphi}\, d\varphi;$$

on voit, en se reportant au n° **287**, que sa longueur est égale à celle de l'ellipse dont les demi-axes sont $R - \alpha$ et $R + \alpha$.

Pour une cycloïde allongée, les demi-axes de l'ellipse correspondante seraient $\alpha - R$ et $\alpha + R$.

2° *Chaînette.* — C'est la roulette engendrée par le foyer d'une parabole roulante. On a, pour la parabole, $x = \frac{y^2}{2p}$, et, en supposant que y soit le paramètre t, $y' = 1$, $x' = \frac{y}{p}$. Portons ces valeurs dans les formules (3), en y remplaçant α et β par les coordonnées du foyer, à savoir $\frac{1}{2}p$ et 0; il vient :

$$X = \frac{-y(p^2 + y^2)}{2p\sqrt{y^2 + p^2}} + \int \sqrt{y^2 + p^2}\, \frac{dy}{p}$$

et

$$(4) \qquad Y = \frac{-1}{2} \sqrt{y^2 + p^2}.$$

Dans l'expression de X, remplaçons l'intégrale par sa valeur obtenue au n° **286**; il vient, après réductions,

$$\frac{p}{2} \log(y + \sqrt{y^2 + p^2}),$$

et, en ajoutant la constante $-\frac{p}{2}\log p$, ce qui ne fait que déplacer la courbe parallèlement à l'axe des X,

$$(5) \qquad X = \frac{p}{2} \log \frac{y + \sqrt{y^2 + p^2}}{p}.$$

L'équation cartésienne de la chaînette s'obtient en éliminant y entre (4) et (5), ce qui se fait ainsi. On a, par (5),

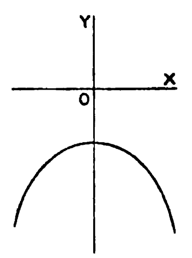
$$y + \sqrt{y^2 + p^2} = p\, e^{\frac{2X}{p}},$$

d'où, en vertu de (4),

$$y = p\, e^{\frac{2X}{p}} + 2Y;$$

si l'on porte enfin cette valeur de y dans (4), il vient, en élevant

Fig. 76.



au carré et en posant $\frac{p}{2} = p'$,

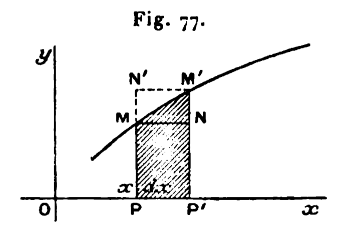
$$-Y = \frac{p'}{2}\left[e^{\frac{X}{p'}} + e^{\frac{-X}{p'}}\right].$$

On dit que l'axe des X (*fig.* 76) est la *base de la chaînette*.

3° *Volumes et aires des surfaces de révolution.*

291. Volumes. — Soit une courbe plane, $y = y(x)$, qui, en tournant autour de Ox (*fig.* 77), engendre une surface de révolution ; admettons sans définition précise, pour cette surface, la

Fig. 77.



notion du volume compris entre un parallèle fixe, d'abscisse x_0, et le parallèle mobile d'abscisse x. Ce volume est, dès lors, une fonction de x, que nous désignerons par $V(x)$.

Il est aisé de calculer la valeur principale de son accroissement ΔV, quand x devient $x + dx$; ΔV est, en effet, le volume engendré par la révolution du trapèze curviligne MM'P'P, compris évidemment entre ceux qu'engendrent les rectangles MNP'P et N'M'P'P, c'est-à-dire entre $\pi y^2 dx$ et $\pi(y + \Delta y)^2 dx$. Donc

$$\pi y^2 dx < \Delta V < \pi(y + \Delta y)^2 dx.$$

Les deux termes extrêmes ont même valeur principale, $\pi y^2 dx$, laquelle est, dès lors, celle de ΔV ; de sorte que

$$dV = \pi y^2 dx$$

ou

$$\frac{dV}{dx} = \pi y^2.$$

On en conclut, en remontant aux primitives,

$$V = \int \pi y^2 dx + \text{const.} = \int_{x_0}^{x} \pi y^2 dx,$$

puisque $V(x)$ doit s'annuler pour $x = x_0$.

292. Aires. — De même, l'aire comprise entre les parallèles d'abscisses x_0 et x, sur la surface de révolution, a pour accroissement l'aire engendrée par la révolution de l'arc MM', qui a même valeur principale que l'aire engendrée par la corde MM' (tronc de

cône); si donc $A(x)$ est l'aire considérée, on a

$$dA = \text{valeur principale de } \pi MM'(y + y + \Delta y),$$

c'est-à-dire

$$dA = 2\pi y \sqrt{1 + y'^2}\, dx;$$

d'où, en vertu du raisonnement fait plus haut,

$$A = 2\pi \int_{x_0}^{x} y\sqrt{1 + y'^2}\, dx.$$

293. Exemples. — 1° *Volume de l'ellipsoïde de révolution.* Le volume compris entre le parallèle x et l'équateur $(x = 0)$ est, puisque $y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$,

$$V = \pi \int_0^x \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2)\, dx = \frac{\pi b^2}{a^2}\left(a^2 x - \frac{x^3}{3}\right).$$

Le volume total de l'ellipsoïde s'obtient en faisant $x = a$ et en doublant le résultat :

$$2\pi \frac{b^2}{a^2}\left(a^3 - \frac{a^3}{3}\right) = \frac{4}{3}\pi a b^2.$$

2° *Aire de l'ellipsoïde de révolution.* — L'aire comprise entre l'équateur et le parallèle x est

$$A = 2\pi \int_0^x y\sqrt{1 + y'^2}\, dx = 2\pi \int_0^x \sqrt{y^2 + y^2 y'^2}\, dx.$$

Or l'équation de l'ellipse méridienne donne

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2),$$
$$yy' = -\frac{b^2}{a^2}x,$$

d'où

$$A = 2\pi \frac{b}{a^2}\int_0^x \sqrt{a^2(a^2 - x^2) + b^2 x^2}\, dx = 2\pi \frac{b}{a^2}\int_0^x \sqrt{a^4 - c^2 x^2}\, dx,$$

en posant toujours $c^2 = a^2 - b^2$. On est ramené à l'intégrale

$$\int \sqrt{\frac{a^4}{c^2} - x^2}\, dx,$$

qu'on sait calculer, et qu'on a obtenue en particulier aux n°s 278 et 279.

CHAPITRE IV.

EXTENSION DE LA NOTION D'INTÉGRALE DÉFINIE.

Nous avons essentiellement supposé jusqu'ici que la fonction à intégrer était continue entre les limites d'intégration et qu'aucune de celles-ci n'était infinie (n° **264**); essayons maintenant de nous affranchir de ces restrictions, en commençant par le cas des limites infinies.

I. — LIMITES INFINIES.

294. Définition. — Si la limite supérieure, par exemple, est *infinie,* on définit l'intégrale par la relation

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \text{limite, pour } p = +\infty, \text{ de } \int_a^p f(x)\,dx,$$

définition qui n'a de sens, bien entendu, que si le second membre a une limite, quand p tend vers l'infini; tout revient donc à voir si cette limite existe.

Or, on ne peut donner de *règle générale* permettant de reconnaître, dans tous les cas, l'existence de la limite; c'est ainsi que, dans la théorie des séries, il n'y a pas de règle générale pour reconnaître la convergence. Comme dans la théorie des séries, on ne peut qu'indiquer des *règles particulières,* qui reposent sur la comparaison de l'intégrale proposée avec des intégrales à limite supérieure infinie, qu'on sait, *a priori,* être, ou non, finies et déterminées.

295. Observations générales. — 1° Supposons que la fonction $f(x)$ ait une limite, A, quand x tend vers l'infini; A doit nécessairement être nul, pour que l'intégrale $\int_a^\infty f(x)\,dx$ puisse être finie et déterminée.

Supposons, en effet, A non nul, et, pour fixer les idées, $A > 0$; à partir d'une valeur suffisamment grande de x, $x = q$, la fonction $f(x)$ restera comprise entre deux nombres positifs *non nuls*, A_1 et A_2; l'intégrale proposée, prise entre q et p, est donc comprise entre les deux intégrales

$$A_1 \int_q^p dx \quad \text{et} \quad A_2 \int_q^p dx,$$

c'est-à-dire entre $A_1(p-q)$ et $A_2(p-q)$, quantités qui tendent vers l'infini positif en même temps que p.

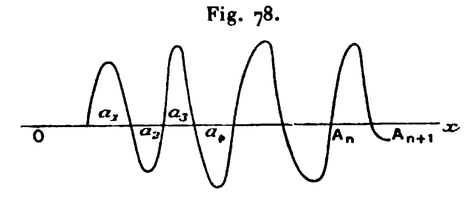
2° Cette condition n'est d'ailleurs pas nécessaire, c'est-à-dire que l'intégrale considérée peut avoir une valeur finie et déterminée sans que la fonction $f(x)$ ait une limite (nulle) pour $x = \infty$.

Par exemple, si $f(x)$ change une infinité de fois de signe quand x tend vers $+\infty$, c'est-à-dire si la courbe $y = f(x)$ traverse une infinité de fois l'axe des x, l'aire indéfinie comprise entre cette courbe, l'ordonnée fixe $x = a$ et l'axe Ox a pour expression

$$A = \int_a^\infty f(x)\, dx = \text{const.} + a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \ldots,$$

$a_1, a_3, \ldots$ (*fig.* 78) étant les aires des boucles situées au-dessus

Fig. 78.



de Ox; $a_2, a_4, \ldots$ celles des boucles situées au-dessous (n° **274**). L'aire totale A se présente ainsi sous la forme d'une série, et, pour qu'elle ait une valeur finie et déterminée, il est nécessaire que le terme général a_n tende vers zéro : cela peut se produire sans que l'ordonnée $f(x)$ de la courbe tende vers zéro, pour x infini; il suffira que les *bases* $A_n A_{n+1}$ des boucles successives aient pour limite zéro.

Citons, comme exemple, l'*intégrale de Fresnel,*

$$\int_0^\infty \sin x^2\, dx,$$

qui est finie et déterminée, ainsi que nous le verrons plus bas (n° 301) : ici $f(x)$, c'est-à-dire $\sin x^2$, ne tend pas vers zéro, et oscille entre -1 et $+1$, quand x tend vers l'infini; comme d'ailleurs $f(x)$ s'annule pour $x=\sqrt{n\pi}$, la *base*, $A_n A_{n+1}$, d'une boucle a pour longueur

$$\sqrt{(n+1)\pi}-\sqrt{n\pi}=\frac{(n+1)\pi-n\pi}{\sqrt{(n+1)\pi}+\sqrt{n\pi}}=\frac{\pi}{\sqrt{(n+1)\pi}+\sqrt{n\pi}},$$

quantité qui tend bien vers zéro pour n infini.

Il n'est même pas nécessaire, pour que l'intégrale soit finie, que la fonction $f(x)$, dans le cas où elle n'a pas de limite quand x croît indéfiniment, présente une infinité de changements de signe; elle peut demeurer constamment positive, par exemple : mais alors il faut que les intervalles pendant lesquels $f(x)$ reste supérieure à à un nombre quelconque, A, si petit soit-il, aient une somme, σ, finie; car l'intégrale $\int_a^\infty f(x)\,dx$ est évidemment supérieure à $A\sigma$. Nous donnerons plus loin (n° 309) un exemple de ce cas singulier.

Dans les applications, on n'a, en général, à étudier que des intégrales pour lesquelles $f(x)$ tend vers zéro, et voici, à leur sujet, les *règles particulières* les plus usuelles.

296. On procède par comparaison avec l'intégrale $\int_a^\infty \frac{dx}{x^n}$, qu'on peut calculer directement. Cette intégrale (en supposant $a>0$, pour éviter la discontinuité, qui correspondrait à $x=0$, de la fonction $\frac{1}{x^n}$) est finie et déterminée pour $n>1$, infinie pour $n\leqq 1$. Cela résulte immédiatement des relations

$$\int_a^p \frac{dx}{x^n}=\frac{1}{n-1}\left(\frac{1}{a^{n-1}}-\frac{1}{p^{n-1}}\right) \qquad (\text{si } n \gtrless 1);$$

$$\int_a^p \frac{dx}{x}=\log p-\log a \qquad (\text{si } n=1).$$

On déduit de là, par comparaison, le théorème suivant, qui est d'une application fréquente.

297. Théorème. — *Si $f(x)$ peut se mettre sous la forme $\frac{\psi(x)}{x^n}$, la fonction $\psi(x)$ ayant une limite finie et non nulle pour x infini, l'intégrale $\int_a^\infty f(x)\,dx$ a une valeur finie et déterminée quand $n > 1$, et une valeur infinie quand $n \leqq 1$.*

La démonstration résulte immédiatement des remarques du numéro précédent. Soit, en effet, A la limite de $\psi(x)$, A étant par hypothèse différent de zéro. A partir d'une valeur suffisamment grande de x, $x = q$, la fonction $\psi(x)$ restera comprise entre deux nombres A_1 et A_2, ayant le même signe que A; supposons, pour fixer les idées, que ce soit le signe $+$. On aura dès lors (nº 263, Corollaire III)

$$A_1 \int_q^p \frac{dx}{x^n} < \int_q^p \frac{\psi(x)\,dx}{x^n} < A_2 \int_q^p \frac{dx}{x^n}.$$

Pour $n \leqq 1$, les deux intégrales extrêmes augmentent indéfiniment avec p, comme on l'a vu au numéro précédent, c'est-à-dire que l'intégrale intermédiaire croît aussi indéfiniment. Pour $n > 1$, les deux intégrales extrêmes tendent vers une limite finie pour p infini, de sorte que l'intégrale intermédiaire reste finie. D'ailleurs cette intégrale,

$$\int_q^p \frac{\psi(x)}{x^n}\,dx,$$

augmente avec p, car tous ses éléments sont positifs en vertu de l'hypothèse que $\psi(x)$ reste compris entre A_1 et A_2; c'est donc une fonction qui croît avec p, sans pouvoir dépasser un nombre fini; elle a, par suite, une limite finie et déterminée pour $p = \infty$.

C. Q. F. D.

On a un théorème pareil lorsque la limite inférieure de l'intégrale est $-\infty$, et aussi lorsque les deux limites sont respectivement $-\infty$ et $+\infty$. Les remarques suivantes s'appliquent également à ces deux cas.

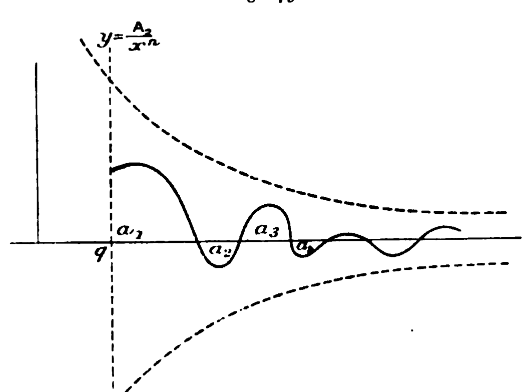
298. Remarque I. — Dans le cas de $n > 1$, il n'est pas nécessaire, pour que l'intégrale $\int_a^\infty \frac{\psi(x)}{x^n}\,dx$ ait une valeur finie et dé-

terminée, que $\psi(x)$ ait une limite finie et non nulle pour x infini; *il suffit que $\psi(x)$ demeure fini* (¹).

En effet, dire que $\psi(x)$ reste fini, c'est dire que $\psi(x)$ demeure compris, pour $x > q$, entre deux nombres A_1 et A_2. Si A_1 et A_2 sont de même signe, la démonstration ci-dessus est valable sans modification et prouve que l'intégrale proposée a une valeur finie et déterminée.

Si A_1 et A_2 sont de signes contraires, $A_1 < 0$, $A_2 > 0$, c'est-à-dire si $\psi(x)$ change de signe une infinité de fois entre $x = q$ et $x = +\infty$, la courbe $y = \frac{\psi(x)}{x^n}$ a la forme ci-dessous. Elle est

Fig. 79.



comprise, par hypothèse, à partir de l'abscisse $x = q$, entre les deux courbes

$$y = \frac{A_2}{x^n}, \qquad y = \frac{A_1}{x^n}.$$

L'aire A, qui représente l'intégrale $\int_q^\infty \frac{\psi(x)}{x^n}\,dx$, est donnée par la série

$$A = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \ldots,$$

$a_1, a_2, \ldots$ ayant la même signification qu'au n° 295, 2°.

(¹) C'est-à-dire que la fonction $\psi(x)$ peut avoir une limite nulle, ou même n'avoir aucune limite, pourvu qu'elle reste comprise entre deux nombres finis.

La somme s des termes positifs de cette série,

$$s = a_1 + a_3 + a_5 + \ldots,$$

est finie et déterminée, puisqu'elle est évidemment inférieure à l'aire finie $A_2 \int_q^{\infty} \frac{dx}{x^n}$; il en est de même de la somme s', des termes négatifs, pris en valeur absolue,

$$s' = a_2 + a_4 + a_6 + \ldots,$$

car s' est inférieure à l'aire finie $(\operatorname{mod} A_1) \int_q^{\infty} \frac{dx}{x^n}$. Or il est clair que si deux séries, s et s', *à termes positifs,* sont convergentes, la série obtenue en retranchant des termes de la première les termes de la seconde, dans un ordre quelconque, est convergente et a pour somme $s - s'$. L'aire A est donc finie et déterminée.

C. Q. F. D.

299. Remarque II. — Dans le cas de $n \leqq 1$, il n'est pas nécessaire, pour que l'intégrale $\int_a^{\infty} \frac{\psi(x)}{x^n} dx$ ait une valeur infinie, que $\psi(x)$ ait une limite finie et non nulle pour x infini; il suffit, *a fortiori,* que $\psi(x)$, pour $x > q$, garde un signe constant et reste supérieur en valeur absolue à un nombre positif A_1.

Si, au contraire, $\psi(x)$ a une limite nulle pour x infini, ou si $\psi(x)$ ne garde pas un signe constant quand x tend vers $+\infty$, il y a doute, et l'intégrale peut avoir une valeur finie et déterminée, comme on va le montrer par un exemple.

300. Exemple. — Soit l'intégrale

$$I = \int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x^n} dx,$$

pour $0 < n \leqq 1$ [1] : ici $\psi(x)$, c'est-à-dire $\sin x$, oscille entre -1 et $+1$, et l'on ne peut rien affirmer.

---

[1] Si $n > 1$, l'intégrale $\int_1^{\infty} \frac{\sin x}{x^n} dx$ (où l'on a pris 1 pour limite inférieure afin d'éviter la discontinuité qui correspond à $x = 0$) est finie et déterminée en vertu de la remarque I.

Pour établir que I a une limite, construisons la courbe

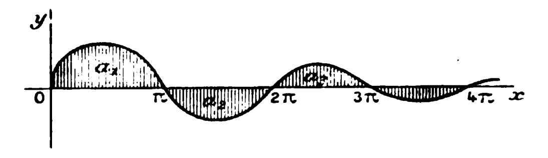
$$y = \frac{\sin x}{x^n}.$$

à droite de Oy.

Elle se compose d'une infinité de boucles, de plus en plus aplaties, coupant Ox aux points d'abscisses $0, \pi, 2\pi, \ldots, n\pi, \ldots$.

Soient, en valeur absolue, $a_1, a_2, a_3, \ldots$ (*fig.* 80) les aires

Fig. 80.



ombrées des boucles successives; on a

$$I = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \ldots.$$

Or les quantités $a_1, a_2, \ldots$ vont en diminuant; car, à un élément $\frac{\sin x}{x^n} dx$ de l'aire a_1, par exemple, correspond l'élément $\frac{\sin(\pi + x)}{(\pi + x)^n} dx$, ou $-\frac{\sin x}{(\pi + x)^n} dx$, de l'aire a_2, inférieur au premier en valeur absolue, puisqu'on a évidemment

$$\operatorname{mod} \frac{\sin x}{x^n} dx > \operatorname{mod} \frac{\sin x}{(\pi + x)^n} dx,$$

pour toute valeur positive de x.

De plus, l'aire a_p tend vers zéro lorsque p tend vers l'infini, car, en valeur absolue, cette aire est inférieure à celle d'un rectangle de base π, dont la hauteur décroît indéfiniment.

L'intégrale I se présente ainsi sous la forme d'une série à termes alternativement positifs et négatifs, qui décroissent en valeur absolue et ont zéro pour limite; elle a donc une limite finie et déterminée.

301. Remarque I. — Ce résultat est d'autant plus intéressant que l'aire totale des boucles situées au-dessus de Ox, à savoir

$a_1 + a_3 + \ldots$, est infinie, de même que l'aire totale des boucles situées au-dessous; on établit ce point sans difficulté [1].

Remarque II. — En particulier, si l'on suppose $n = \frac{1}{2}$, on voit que l'intégrale $\int_0^\infty \frac{\sin x}{\sqrt{x}}\,dx$ est finie. Par le changement de variable $x = u^2$, elle se réduit au double de l'*intégrale de Fresnel* (n° 295)

$$\int_0^\infty \sin u^2\,du,$$

qui est dès lors finie et déterminée. Il en est de même de l'intégrale analogue

$$\int_0^\infty \cos u^2\,du,$$

ainsi qu'on l'établit aisément.

---

[1] Cela revient, en effet, à démontrer que l'intégrale $\int_0^\infty \frac{dx}{x^n}(\operatorname{mod}\sin x)$ est infinie, et il suffira pour cela de montrer, puisque $\operatorname{mod}\sin x > \sin^2 x$, que

$$\int_0^\infty \frac{\sin^2 x}{x^n}\,dx$$

est infini. Or on a

$$\int_1^p \frac{\sin^2 x}{x^n}\,dx + \int_1^p \frac{\cos^2 x}{x^n}\,dx = \int_1^p \frac{dx}{x^n},$$

ce qui est infini pour $p = \infty$, puisque $n \leq 1$. D'ailleurs,

$$\int_1^p \frac{\sin^2 x}{x^n}\,dx - \int_1^p \frac{\cos^2 x}{x^n}\,dx = -\int_1^p \frac{\cos 2x}{x^n}\,dx,$$

ce qui est fini, pour $p = \infty$, comme on le voit en posant $2x = u$ et en faisant un raisonnement pareil à celui du n° 300. Il en résulte que les deux intégrales $\int_1^\infty \frac{\sin^2 x}{x^n}\,dx$ et $\int_1^\infty \frac{\cos^2 x}{x^n}\,dx$ sont infinies, pour $n \leq 1$.

II. — DISCONTINUITÉ DE LA FONCTION.

302. Cherchons maintenant à étendre la notion d'intégrale définie au cas de la discontinuité de la fonction.

1° Si $f(x)$ est discontinue pour la limite supérieure b, on définit l'intégrale par la relation

$$\int_a^b f(x)\,dx = \text{limite, pour } \varepsilon = 0, \text{ de } \int_a^{b-\varepsilon} f(x)\,dx,$$

définition qui suppose que le second membre a une limite déterminée et finie, quand ε tend vers zéro par valeurs positives.

2° On définit de même l'intégrale, dans le cas où la fonction est discontinue pour la limite inférieure, par la relation

$$\int_a^b f(x)\,dx = \text{limite, pour } \varepsilon' = 0, \text{ de } \int_{a+\varepsilon'}^b f(x)\,dx,$$

quand ε' tend vers zéro par valeurs positives.

3° Enfin, si la fonction est discontinue pour une valeur c, comprise entre a et b, on posera

$$\int_a^b f(x)\,dx = \text{limite de } \int_a^{c-\varepsilon} f(x)\,dx + \int_{c+\varepsilon'}^b f(x)\,dx,$$

ε et ε' tendant vers zéro indépendamment l'un de l'autre, et par valeurs positives.

303. Observons que $f(x)$ peut être discontinue de deux manières : 1° ou bien, pour $x = c$, $f(x)$ a deux valeurs finies différentes, c'est-à-dire que $f(c-\varepsilon)$ et $f(c+\varepsilon)$ ont respectivement des limites différentes, lorsque ε tend vers zéro par valeurs positives; 2° ou bien, pour $x = c$, $f(x)$ devient infinie.

Dans le premier cas, la courbe $y = f(x)$ a la forme ci-dessous (*fig.* 81).

L'intégrale

$$\int_a^b = \lim \int_a^{c-\varepsilon} + \lim \int_{c+\varepsilon'}^b$$

est, malgré la discontinuité, finie et déterminée, car l'intégrale $\int_a^{c-\varepsilon}$ tend, pour $\varepsilon = 0$, vers l'aire curviligne A, et l'intégrale $\int_{c+\varepsilon'}^{b}$ tend de même vers l'aire A'. Il en résulte qu'une discontinuité de cette nature n'empêche pas l'intégrale d'être déterminée.

Fig. 81.

Il en est autrement des discontinuités dues au passage de $f(x)$ par l'infini; dans ce cas, comme dans le cas des limites infinies, on ne peut d'ailleurs indiquer que des règles particulières, analogues à celles des nos **297-299**.

304. Si $f(x)$ est infini pour $x = c$, l'intégrale $\int_a^b f(x)\,dx$ pourra, selon les cas, être finie ou non. Ainsi l'intégrale

$$\int_a^b \frac{dx}{(x-c)^n} \qquad (a < c < b)$$

est finie pour $n < 1$; elle est infinie ou indéterminée pour $n \geqq 1$.

Cela résulte des inégalités

$$\left.\begin{aligned} \int_a^{c-\varepsilon} \frac{dx}{(x-c)^n} &= \frac{1}{n-1}\left[\frac{-1}{(-\varepsilon)^{n-1}} + \frac{1}{(a-c)^{n-1}}\right] \\ \int_{c+\varepsilon'}^{b} \frac{dx}{(x-c)^n} &= \frac{1}{n-1}\left[\frac{1}{\varepsilon'^{n-1}} - \frac{1}{(b-c)^{n-1}}\right] \end{aligned}\right\} \quad (\text{pour } n \gtrless 1),$$

et, dans le cas de $n = 1$, des relations

$$\int_a^{c-\varepsilon} \frac{dx}{x-c} = \log\frac{\varepsilon}{c-a}, \qquad \int_{c+\varepsilon'}^{b} \frac{dx}{x-c} = \log\frac{b-c}{\varepsilon'}.$$

Les seconds membres de ces relations ne restent finis, pour ε et ε' nuls, que si n est inférieur à l'unité.

On déduit de là, par une méthode semblable à celle des nos **297-299**, les propositions suivantes :

305. Théorème. — *Si $f(x)$ peut se mettre sous la forme $\frac{\psi(x)}{(x-c)^n}$, la fonction $\psi(x)$ étant finie et non nulle pour $x=c$, l'intégrale $\int_a^b f(x)\,dx$ (où $a<c<b$) a une valeur finie et déterminée quand $n<1$, et une valeur infinie ou indéterminée* [1] *quand $n \geqq 1$.*

Remarque I. — Dans le cas de $n<1$, il n'est pas nécessaire, pour que l'intégrale ait une valeur finie et déterminée, que la fonction $\psi(x)$ soit finie et *non nulle* pour $x=c$; il suffit qu'elle soit finie.

Remarque II. — Dans le cas de $n \geqq 1$, il n'est pas nécessaire, pour que l'intégrale soit infinie ou indéterminée, que la fonction $\psi(x)$ soit finie et non nulle pour $x=c$; il suffit que, lorsque x tend vers c, $\psi(x)$ finisse par garder un signe constant et par rester supérieure, en valeur absolue, à un nombre positif *non nul.*

306. On peut d'ailleurs déduire directement ces propositions de celles des nos **297-299**, en ramenant, par un changement de variable, le cas de la discontinuité à celui de la limite infinie.

D'après la définition

$$\int_a^b f(x)\,dx = \text{limite de} \int_a^{c-\varepsilon} f(x)\,dx + \int_{c+\varepsilon'}^b f(x)\,dx,$$

on a deux limites à étudier, l'une pour $\varepsilon = 0$, l'autre pour $\varepsilon' = 0$.

Soit d'abord l'intégrale

$$\int_{c+\varepsilon'}^b \psi(x)\frac{dx}{(x-c)^n};$$

[1] Nous disons *infinie ou indéterminée* parce que l'intégrale considérée est, par définition, la limite de la somme de deux autres intégrales, qui sont toutes deux infinies, mais dont les signes peuvent être contraires.

posons-y

$$x - c = \frac{1}{u};$$

elle devient

$$(1) \qquad \int_{\frac{1}{b-c}}^{\frac{1}{\varepsilon'}} \psi\left(c + \frac{1}{u}\right) \frac{du}{u^{2-n}},$$

et l'on est ramené, puisque ε' tend vers zéro par valeurs positives, au cas de la limite supérieure infinie et positive.

Donc (nos 297-299), si $2 - n$ est supérieur à 1, c'est-à-dire si $n < 1$, l'intégrale (1) est finie et déterminée, pourvu que $\psi\left(c + \frac{1}{u}\right)$ reste fini pour u infini, c'est-à-dire pourvu que $\psi(x)$ reste fini pour $x = c$. De même, l'intégrale (1) est infinie si $2 - n$ est égal ou inférieur à 1, c'est-à-dire si $n \geqq 1$, et si $\psi(x)$, quand x tend vers c, garde un signe constant et reste, en valeur absolue, supérieur à un nombre positif non nul.

On traiterait de même l'intégrale $\int_a^{c-\varepsilon}$, en posant $x - c = -\frac{1}{v}$, et l'on arriverait à des conclusions identiques.

III. — APPLICATIONS ET EXEMPLES.

---

307. Fonctions rationnelles. — Soit la fonction rationnelle

$$f(x) = \frac{F(x)}{\varphi(x)} = \frac{A_0 x^m + A_1 x^{m-1} + \ldots}{B_0 x^p + B_1 x^{p-1} + \ldots},$$

F et φ étant des polynomes en x, premiers entre eux, de degrés m et p; pour que l'intégrale

$$(2) \qquad \int_a^b \frac{F(x)}{\varphi(x)} dx,$$

où a et b sont finis, ait une valeur finie et déterminée, il faut et il suffit que $\varphi(x)$ ne s'annule pas entre a et b. Car, si $\varphi(x)$ s'annule pour $x = c$, on aura

$$f(x) = \frac{F(x)}{(x-c)^n Q(x)},$$

n étant au moins égal à l'unité : d'ailleurs la fonction $\frac{F(x)}{Q(x)}$ a une valeur déterminée, *non nulle,* pour $x = c$, et dès lors, puisque $n \geqq 1$, l'intégrale n'a pas de valeur déterminée (n° 305).

Si une limite est infinie, si $b = +\infty$ par exemple, il faut, pour que l'intégrale (2) ait un sens, non seulement que $\varphi(x)$ ne s'annule pas entre a et $+\infty$, mais encore que le degré du numérateur, $F(x)$, soit inférieur, de deux unités au moins, au degré du dénominateur $\varphi(x)$. Car on peut écrire

$$f(x) = \frac{1}{x^{p-m}}\left[\frac{A_0 + A_1\frac{1}{x} + \ldots}{B_0 + B_1\frac{1}{x} + \ldots}\right];$$

la quantité entre crochets a une limite finie, non nulle, $\frac{A_0}{B_0}$, pour x infini; il faut et il suffit donc (n° 297), pour que l'intégrale (2) ait une valeur finie et déterminée, que $p - m$ soit supérieur à l'unité, c'est-à-dire, puisque m et p sont entiers, qu'on ait

$$p - m \geqq 2.$$

En particulier, pour que l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{F(x)}{\varphi(x)} dx$ ait une valeur finie et déterminée, il faut et il suffit :

1° Que $\varphi(x)$ n'ait pas de racine réelle;

2° Que le degré de $\varphi(x)$ surpasse, de deux unités au moins, celui de $F(x)$.

308. Exponentielles. — On sait qu'une puissance positive quelconque de e^x est infiniment grande par rapport à toute puissance de x, pour x infini; c'est-à-dire que le produit $e^{-mx}x^n$ tend vers zéro quand x croît indéfiniment, quel que soit n, pourvu que m soit positif.

Cela rappelé, désignons par a une quantité positive quelconque, et considérons l'intégrale

$$\int_a^{\infty} e^{-mx} x^n \, dx \qquad (m > 0).$$

Elle est finie, car on peut l'écrire

$$\int_a^\infty e^{-mx} x^{n+2} \frac{dx}{x^2} = \int_a^\infty \frac{\psi(x)}{x^2} dx,$$

et la fonction $\psi(x)$, c'est-à-dire $e^{-mx}x^{n+2}$, a zéro pour limite, quel que soit n, pour $x = +\infty$: donc (n° 298), l'intégrale est finie et déterminée. On a supposé a positif pour éviter la discontinuité qui correspondrait à $x = 0$, si n était négatif.

Si a était nul et n négatif, l'intégrale

$$\int_0^\infty \frac{e^{-mx}}{x^{n'}} dx \qquad (n' > 0)$$

serait, à cause du point de discontinuité $x = 0$, infinie pour $n' \geqq 1$: elle serait finie et déterminée pour $n' < 1$ (n° 305); car, pour $x = 0$, la fonction $\psi(x)$, c'est-à-dire e^{-mx}, est égale à l'unité.

En particulier, l'intégrale

$$\int_0^\infty e^{-x} x^{\alpha-1} dx,$$

qui sera étudiée dans le Cours de seconde année comme fonction de α (fonction eulérienne), est finie et déterminée lorsque α est positif; elle est infinie lorsque α est nul ou négatif.

309. Exemple d'un cas singulier. — Soit l'intégrale

$$I = \int_\pi^\infty \frac{dx}{x^2(\sin^2 x)^{\frac{1}{3}}}.$$

La fonction à intégrer, $f(x)$, est ici $x^{-2}(\sin^2 x)^{-\frac{1}{3}}$; elle reste constamment positive et devient infinie une infinité de fois entre π et ∞, car $\sin x$ s'annule pour $x = \pi, 2\pi, \ldots, n\pi, \ldots$; néanmoins, l'intégrale a une valeur finie.

En effet, entre $n\pi$ et $(n+1)\pi$, $\frac{1}{x^2}$ est inférieur à $\frac{1}{n^2\pi^2}$, de sorte que l'on a

$$(3) \qquad \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} f(x)\, dx < \frac{1}{n^2\pi^2} \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{dx}{(\sin^2 x)^{\frac{1}{3}}}.$$

Je dis que l'intégrale qui figure au second membre a une valeur finie, A, indépendante de n; posons-y, en effet, $x = n\pi + z$, elle devient

$$\int_0^\pi \frac{dz}{(\sin^2 z)^{\frac{1}{3}}},$$

égale évidemment à

$$2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dz}{(\sin^2 z)^{\frac{1}{3}}},$$

et tout revient à démontrer que cette dernière intégrale est finie. Or, entre o et $\frac{\pi}{2}$, la fonction $(\sin^2 z)^{-\frac{1}{3}}$ ne devient infinie que pour $z = 0$, et l'on peut écrire

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dz}{(\sin^2 z)^{\frac{1}{3}}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\psi(z)}{z^{\frac{2}{3}}}\, dz;$$

la fonction $\psi(z)$, c'est-à-dire $\left(\frac{z^2}{\sin^2 z}\right)^{\frac{1}{3}}$, est égale à 1 pour $z = 0$, et l'exposant $\frac{2}{3}$, de z, est inférieur à 1 : l'intégrale est donc finie et déterminée (n° 305). Par suite on a, d'après (3),

$$\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} f(x)\, dx < \frac{A}{n^2\pi^2}.$$

Il en résulte évidemment que la valeur de l'intégrale

$$\int_\pi^p f(x)\, dx$$

est inférieure, quel que soit p, à la somme de la série

$$\frac{A}{\pi^2} + \frac{A}{4\pi^2} + \ldots + \frac{A}{n^2\pi^2} + \ldots = \frac{A}{\pi^2}\left(1 + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{n^2} + \ldots\right),$$

somme qui est finie, puisque la série Σn^{-2} est convergente (n° 130). L'intégrale est donc finie quel que soit p, et, puisqu'elle augmente avec p, ses éléments étant tous positifs, elle a, pour p infini, une limite finie et déterminée. C. Q. F. D.

De même, *a fortiori*, l'intégrale

$$\int_{\pi}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2(\sin^2 x)^{\frac{1}{3}}},$$

qu'on déduit de la précédente en augmentant le dénominateur, est finie, et, par suite, déterminée : ici, la fonction $f(x)$ ne devient pas infinie entre $x=\pi$ et $x=\infty$, mais elle atteint une infinité de fois la valeur 1.

310. **Calcul des intégrales généralisées.** — La formule fondamentale

$$(1) \qquad \int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a),$$

où $F(x)$ désigne une fonction primitive de $f(x)$, est-elle applicable au cas où la fonction $f(x)$ est discontinue entre a et b, et au cas d'une limite infinie?

1° Supposons d'abord une limite infinie, $b=+\infty$; on a, si $f(x)$ est continue entre a et $+\infty$,

$$\int_a^p f(x)\,dx = F(p) - F(a),$$

et cela quelque grand que soit p; par suite, en passant à la limite,

$$\int_a^{\infty} f(x)\,dx = F(\infty) - F(a).$$

La formule (1) est donc applicable si la fonction $f(x)$ est continue entre les limites d'intégration et si $F(\infty)$ a une valeur déterminée.

2° Si $f(x)$ est discontinue entre a et b, pour $x=c$, on a, en la supposant continue entre a et $c-\varepsilon$, et entre $c+\varepsilon'$ et b,

$$\int_a^{c-\varepsilon} f(x)\,dx = F(c-\varepsilon) - F(a),$$

$$\int_{c+\varepsilon'}^{b} f(x)\,dx = F(b) \qquad - F(c+\varepsilon'),$$

d'où, en ajoutant membre à membre et faisant tendre ε et ε' vers

zéro,

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) + \lim F(c-\varepsilon) - \lim F(c+\varepsilon').$$

Si $F(x)$ est continue pour $x=c$, $F(c-\varepsilon)$ et $F(c+\varepsilon')$ ont une même limite $F(c)$, et l'on a encore

$$(1) \qquad \int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a).$$

La formule est donc applicable si la fonction $F(x)$ est continue au point de discontinuité de $f(x)$; elle peut être en défaut dans le cas contraire.

Soit par exemple $f(x) = x^{-\frac{1}{3}}$; cette fonction est discontinue pour $x=0$, mais sa primitive, $F(x) = \frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}}$, est continue au même point; la formule est donc applicable, et l'on a, par exemple,

$$\int_{-1}^{+1} x^{-\frac{1}{3}}\,dx = \frac{3}{2}\left(x^{\frac{2}{3}}\right)_{-1}^{+1} = 0.$$

Au contraire, si $f(x) = x^{-2}$, la primitive, $F(x) = -\frac{1}{x}$, est discontinue pour $x=0$; la formule peut être en défaut entre deux limites qui comprennent zéro. Elle donne effectivement un résultat inexact :

$$\int_{-1}^{+1} \frac{dx}{x^2} = -\left(\frac{1}{x}\right)_{-1}^{+1} = -2,$$

ce qui est absurde, car le premier membre, somme d'éléments positifs, ne peut être négatif. En réalité, $\frac{1}{x^2}$ devenant infini pour $x=0$, et l'exposant 2 étant >1, l'intégrale proposée est infinie.

311. Un exemple d'une nature analogue est celui de l'intégrale

$$\int_a^b \frac{f'(x)}{1+f^2(x)}\,dx,$$

où $f(x)$ désigne une fonction de x, continue entre a et b, sauf peut-être en certains points, où elle devient infinie.

L'intégrale indéfinie est arc tang $f(x)$; pour préciser, et puisque les diverses valeurs de l'arc tang diffèrent entre elles de la quantité constante $k\pi$, nous prendrons pour intégrale indéfinie la fonction Arc tang $f(x)$, la lettre A désignant l'arc *unique* compris entre $-\frac{\pi}{2}$ et $+\frac{\pi}{2}$ dont la tangente est $f(x)$. Cette fonction, Arc tang $f(x)$, est une fonction continue de x, à moins que $f(x)$ ne passe par l'infini *en changeant de signe :* car si $f(x)$ passe par exemple de $+\infty$ à $-\infty$, Arc tang $f(x)$ passe brusquement de $+\frac{\pi}{2}$ à $-\frac{\pi}{2}$.

Si donc $f(x)$ ne devient pas infinie quand x varie de a à b, ou si $f(x)$ passe par l'infini sans changer de signe, la fonction Arc tang $f(x)$ sera continue de $x = a$ à $x = b$, et l'on reconnaît comme plus haut que la formule (1) est applicable, en sorte que

$$\int_a^b \frac{f'(x)}{1+f^2(x)}\,dx = \text{Arc tang}\, f(b) - \text{Arc tang}\, f(a).$$

Cette formule est-elle encore vraie si $f(x)$, quand x varie de a à b, passe par l'infini en changeant de signe?

Supposons que, de a à b, $f(x)$ passe une seule fois par l'infini, pour $x = c$, en allant de $+\infty$ à $-\infty$, par exemple. On peut alors appliquer la formule ci-dessus dans chacun des deux intervalles a, $c - \varepsilon$ et $c + \varepsilon'$, b; il vient ainsi

$$\int_a^{c-\varepsilon} \frac{f'(x)}{1+f^2(x)}\,dx = \text{Arc tang}\, f(c-\varepsilon) - \text{Arc tang}\, f(a),$$

$$\int_{c+\varepsilon'}^b \frac{f'(x)}{1+f^2(x)}\,dx = \text{Arc tang}\, f(b) - \text{Arc tang}\, f(c+\varepsilon').$$

Or, par hypothèse, $f(c-\varepsilon)$ tend vers $+\infty$ quand ε tend vers zéro; Arc tang $f(c-\varepsilon)$ tend donc vers $\frac{\pi}{2}$; de même, puisque $f(c+\varepsilon')$ tend vers $-\infty$ pour $\varepsilon' = 0$, Arc tang $f(c+\varepsilon')$ tend vers $-\frac{\pi}{2}$. Il vient donc, en ajoutant membre à membre les deux relations précédentes, et en faisant tendre ε et ε' vers zéro,

$$\int_a^b \frac{f'(x)}{1+f^2(x)}\,dx = \text{Arc tang}\, f(b) - \text{Arc tang}\, f(a) + \pi.$$

Si, pour $x = c$, $f(x)$ eût passé de $-\infty$ à $+\infty$, on aurait eu $-\pi$ au lieu de π dans le second membre.

D'une manière générale, il résulte de là que si $f(x)$, lorsque x va de a à b, passe k fois de $+\infty$ à $-\infty$, et k' fois de $-\infty$ à $+\infty$, on aura

$$\int_a^b \frac{f'(x)}{1+f^2(x)}\,dx = \operatorname{Arc\,tang} f(b) - \operatorname{Arc\,tang} f(a) + (k-k')\pi.$$

312. *Application.* — Soit à évaluer, en coordonnées polaires, l'aire de l'ellipse

$$\rho^2(\mathrm{A}\cos^2\omega + 2\mathrm{B}\cos\omega\sin\omega + \mathrm{C}\sin^2\omega) = 1,$$

qui a pour équation cartésienne $\mathrm{A}x^2 + 2\mathrm{B}xy + \mathrm{C}y^2 = 1$, et dont le centre est à l'origine : pour que la courbe soit une ellipse réelle, il faut et il suffit que $\mathrm{AC} - \mathrm{B}^2$ et C soient positifs.

Soit $\mathrm{S}(\omega)$ l'aire du secteur elliptique compris entre les rayons vecteurs d'angles polaires 0 et ω; on a

$$d\mathrm{S} = \frac{1}{2}\rho^2\,d\omega,$$

c'est-à-dire

$$d\mathrm{S} = \frac{1}{2}\,\frac{d\omega}{\mathrm{A}\cos^2\omega + 2\mathrm{B}\cos\omega\sin\omega + \mathrm{C}\sin^2\omega}.$$

Posons

$$\operatorname{tang}\omega = t, \qquad \omega = \operatorname{arc\,tang} t, \qquad d\omega = \frac{dt}{1+t^2};$$

il vient

$$d\mathrm{S} = \frac{1}{2}\,\frac{dt}{\mathrm{A} + 2\mathrm{B}t + \mathrm{C}t^2} = \frac{1}{2}\,\frac{\mathrm{C}\,dt}{(\mathrm{C}t+\mathrm{B})^2 + \mathrm{AC} - \mathrm{B}^2}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{\mathrm{AC}-\mathrm{B}^2}}\,\frac{\dfrac{\mathrm{C}}{\sqrt{\mathrm{AC}-\mathrm{B}^2}}\,dt}{1+\left(\dfrac{\mathrm{C}t+\mathrm{B}}{\sqrt{\mathrm{AC}-\mathrm{B}^2}}\right)^2}.$$

Si donc on pose

$$f(\omega) = \frac{\mathrm{C}\operatorname{tang}\omega + \mathrm{B}}{\sqrt{\mathrm{AC}-\mathrm{B}^2}} = \frac{\mathrm{C}t+\mathrm{B}}{\sqrt{\mathrm{AC}-\mathrm{B}^2}},$$

on aura

$$f'(\omega)\,d\omega = \frac{\mathrm{C}\,dt}{\sqrt{\mathrm{AC}-\mathrm{B}^2}},$$

et, par suite,

$$dS = \frac{1}{2\sqrt{AC - B^2}} \frac{f'(\omega)\,d\omega}{1 + f^2(\omega)},$$

d'où

$$S = \frac{1}{2\sqrt{AC - B^2}} \int_0^\omega \frac{f'(\theta)\,d\theta}{1 + f^2(\theta)}.$$

On a ainsi à calculer une intégrale du type qui vient d'être étudié, la fonction $f(\theta)$ devenant infinie, entre 0 et 2π, pour $\theta = \frac{\pi}{2}$ et $\theta = \frac{3\pi}{2}$.

Donc :

1° Si ω est compris entre 0 et $\frac{\pi}{2}$, on aura, puisque $f(\theta)$ ne devient pas infinie entre 0 et ω,

$$(2) \qquad S = \frac{1}{2\sqrt{AC - B^2}} \left[\text{Arc tang} \frac{C \tang \omega + B}{\sqrt{AC - B^2}} - \text{Arc tang} \frac{B}{\sqrt{AC - B^2}} \right];$$

2° Si ω est compris entre $\frac{\pi}{2}$ et $\frac{3\pi}{2}$, la fonction $f(\theta)$, lorsque θ croît de 0 à ω, devient infinie pour $\theta = \frac{\pi}{2}$, et passe alors de $+\infty$ à $-\infty$, puisque C est positif; donc S est donnée par la même formule (2), où l'on ajoute le terme $+\pi$ dans le crochet;

3° Si ω est compris entre $\frac{3\pi}{2}$ et 2π, $f(\theta)$ passe de $+\infty$ à $-\infty$ pour $\theta = \frac{\pi}{2}$ et $\theta = \frac{3\pi}{2}$; on doit donc ajouter, dans le crochet du second membre de (2), le terme $+2\pi$.

En particulier, pour $\omega = 2\pi$, S devient l'aire de l'ellipse; les deux Arc tang se détruisent et il reste

$$S = \frac{\pi}{\sqrt{AC - B^2}}.$$

CHAPITRE V.

PROPRIÉTÉS DIVERSES RELATIVES AUX INTÉGRALES DÉFINIES.

I. — INTÉGRATION DES SÉRIES; DÉRIVATION.

313. Intégration. — Il peut être utile, pour calculer une intégrale définie, de développer en série la fonction à intégrer : l'intégrale de la série est-elle la somme des intégrales des termes de celle-ci? Voici à ce sujet le théorème fondamental.

Théorème. — *L'intégrale, entre des limites finies, d'une série uniformément convergente dans un intervalle qui comprend ces limites, s'obtient en faisant la somme des intégrales des termes de la série.*

Soit en effet $S(x)$ la somme d'une série uniformément convergente (n° 136), pour une valeur x comprise dans l'intervalle de convergence uniforme; désignons par a et b deux quantités de ce même intervalle. On a

$$S(x) = u_1(x) + u_2(x) + \ldots + u_n(x) + R_n(x);$$

d'où

$$(1)\quad \int_a^b S(x)\,dx = \int_a^b u_1(x)\,dx + \ldots + \int_a^b u_n(x)\,dx + \int_a^b R_n(x)\,dx.$$

La série $S(x)$ étant uniformément convergente, on peut prendre N assez grand pour que $\operatorname{mod} R_n(x)$ soit inférieur à un nombre donné ε, *pour toutes les valeurs de x comprises entre a et b*, et pour toute valeur de n égale ou supérieure à N; on a ainsi, dans ces conditions,

$$\operatorname{mod} \int_a^b R_n(x)\,dx \leqq \varepsilon \int_a^b dx = \varepsilon(b-a).$$

Donc si $(b-a)$ est fini, c'est-à-dire si les deux limites a et b sont finies, on pourra prendre N assez grand pour que le premier

membre soit aussi petit que l'on veut, pour toutes les valeurs de n au moins égales à N; et par suite, d'après (1), la série indéfinie

$$\int_a^b u_1(x)\,dx + \int_a^b u_2(x)\,dx + \ldots$$

aura pour somme la quantité $\int_a^b S(x)\,dx$. C. Q. F. D.

314. Il est indispensable d'introduire dans la démonstration précédente la notion de convergence uniforme.

Voici, par exemple, un raisonnement qui figure dans un ancien Traité d'Analyse. On écrit la série

$$S(x) = u_1(x) + \ldots + u_n(x) + R_n(x);$$

puisqu'elle est, par hypothèse, convergente, $R_n(x)$ tend vers zéro pour n infini. Si maintenant on intègre les deux membres entre a et b, il vient

$$\int_a^b S(x)\,dx = \int_a^b u_1\,dx + \ldots + \int_a^b u_n\,dx + \int_a^b R_n\,dx,$$

et, puisque R_n tend vers zéro à mesure que n augmente, $\int_a^b R_n\,dx$ tend aussi vers zéro. Donc....

La faute de ce raisonnement est la suivante.

Pour une valeur de x comprise entre a et b, la série S est convergente; c'est-à-dire que $R_n(x)$ tend vers zéro, à mesure que n augmente, *x restant fixe*. Mais si l'on fait *à la fois* varier n et x, rien ne prouve que $R_n(x)$ tende vers zéro; et, comme dans l'intégrale

$$\int_a^b R_n(x)\,dx$$

x est essentiellement variable, on n'a pas le droit de dire que l'intégrale a pour limite zéro, quand n augmente indéfiniment.

315. Un exemple va le confirmer.

Reprenons la série non uniformément convergente du n° **137**,

pour laquelle on a

$$R_{n-1}(x) = \frac{nx}{(x^2+1)^{n+1}}.$$

Ce reste tend vers zéro quand x a une valeur *fixe* réelle quelconque, et quand n augmente indéfiniment : car pour $x = 0$, $R_{n-1}(x)$ est nul, quel que soit n; et pour x non nul, l'exponentielle $(1+x^2)^{n+1}$, de base supérieure à l'unité, est infiniment grande par rapport à n, quand n tend vers l'infini. Néanmoins l'intégrale

$$\int_0^1 R_{n-1}(x)\,dx$$

ne tend pas vers zéro, lorsque n augmente indéfiniment, car on a

$$\int_0^1 \frac{nx}{(1+x^2)^{n+1}}\,dx = -\frac{1}{2}\left[\frac{1}{(1+x^2)^n}\right]_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2^{n+1}},$$

expression qui, pour $n = \infty$, est égale à $\frac{1}{2}$.

316. **Dérivation.** — La question de la dérivation des séries est liée à la précédente; on va établir que :

THÉORÈME. — *Si une série* $S(x)$ *est convergente dans un intervalle ab, et si la série*

$$\Sigma(x) = u'_1(x) + u'_2(x) + \ldots,$$

des dérivées de ses termes, est non seulement convergente, mais uniformément convergente dans cet intervalle, $\Sigma(x)$ *sera la dérivée de* $S(x)$, *pour toute valeur de* x *comprise entre* a *et* b.

On a en effet, en désignant par y une quantité comprise entre a et b,

$$\int_a^y \Sigma(x)\,dx = \int_a^y u'_1(x)\,dx + \ldots + \int_a^y u'_n(x)\,dx + \ldots,$$

puisque la série $\Sigma(x)$ est uniformément convergente; ou

$$\int_a^y \Sigma(x)\,dx = [u_1(y) - u_1(a)] + \ldots + [u_n(y) - u_n(a)] + \ldots,$$

c'est-à-dire (n° 129, 6°)

$$\int_a^y \Sigma(x)\,dx = S(y) - S(a),$$

relation qui montre bien (n° 265) que $\Sigma(y)$ est la dérivée, par rapport à y, de $S(y) - S(a)$, c'est-à-dire de $S(y)$.

C. Q. F. D.

317. Remarque. — Quand la série $S(x)$ converge, la série des dérivées de ses termes peut ne pas converger. Ainsi la série

$$\frac{\sin x}{1^2} + \frac{\sin 2^2 x}{2^2} + \ldots + \frac{\sin n^2 x}{n^2} + \ldots$$

est convergente, puisque les modules de ses termes sont inférieurs aux termes de la série convergente dont le terme général est $\frac{1}{n^2}$; mais sa dérivée ne saurait être représentée par la série

$$\cos x + \cos 4x + \ldots + \cos n^2 x + \ldots,$$

qui n'est pas convergente.

Applications.

318. Développement de $\arcsin x$. — On part de la formule du binome généralisée (n° 161), pour $m = -\frac{1}{2}$,

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \ldots + \frac{1.3\ldots(2n-1)}{2.4\ldots 2n}x^{2n} + \ldots.$$

Cette *série de puissances* a pour cercle de convergence le cercle de rayon 1 (n° 161), et converge dès lors uniformément dans tout cercle intérieur; en particulier elle converge uniformément lorsque x est réel et compris entre $-\rho$ et $+\rho$, ρ étant aussi voisin de 1 qu'on veut, mais inférieur à 1. On peut donc intégrer la série entre 0 et x, pourvu que $\operatorname{mod} x$ soit plus petit que ρ, ce qui donne

$$\operatorname{Arc}\sin x = x + \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + \ldots + \frac{1.3\ldots(2n-1)}{2.4\ldots 2n}\frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \ldots,$$

développement valable entre $-\rho$ et $+\rho$, c'est-à-dire entre -1 et $+1$, ces limites pouvant être exceptées.

319. Développement de arc tang$x$. — On part de la série

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \ldots,$$

qui, de même, converge uniformément lorsque x est réel et compris entre $-\rho$ et $+\rho$. Donc, en intégrant entre o et x,

$$\text{Arc tang}\,x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \ldots,$$

développement valable quand x est compris entre -1 et $+1$, ces limites pouvant être exceptées.

Des considérations plus délicates, dues à Abel, montrent que les développements de Arc sin$x$ et Arc tang$x$ sont encore valables pour $x = \pm 1$.

II. — DÉRIVATION SOUS LE SIGNE $\int$.

---

320. Soit $f(x, \alpha)$ une fonction de x, dépendant d'un paramètre α; l'intégrale

$$(1) \qquad I = \int_a^b f(x, \alpha)\, dx,$$

où les limites a et b sont, soit des constantes absolues, soit des fonctions de α, est une fonction du paramètre α. Lorsque l'intégration de $f(x, \alpha)$ par rapport à x est impossible à l'aide des fonctions élémentaires, on définit ainsi une *fonction nouvelle*, dont il est généralement impossible de donner d'autre expression que l'expression (1) : on va indiquer comment on peut former sa dérivée par rapport à α.

321. Règle de Leibnitz. — Supposons d'abord les limites a et b indépendantes de α, et donnons à ce paramètre un accroissement h; il vient, pour l'accroissement ΔI de l'intégrale,

$$\Delta I = \int_a^b [f(x, \alpha + h) - f(x, \alpha)]\, dx,$$

et la dérivée de I par rapport à α est la limite, pour $h = 0$, de l'expression

$$\frac{\Delta I}{h} = \int_a^b \frac{f(x, \alpha + h) - f(x, \alpha)}{h} dx.$$

Or la quantité sous le signe $\int$ a pour limite, quand h tend vers zéro, *x et α restant fixes,* la dérivée partielle $f'_\alpha(x, \alpha)$, c'est-à-dire que l'on a :

$$\frac{f(x, \alpha + h) - f(x, \alpha)}{h} = f'_\alpha(x, \alpha) + \varepsilon,$$

ε désignant une fonction de x, α et h, qui a zéro pour limite quand h tend vers zéro, *x et α demeurant constants.* D'après cela

$$\frac{\Delta I}{h} = \int_a^b f'_\alpha(x, \alpha)\, dx + \int_a^b \varepsilon\, dx.$$

Dans les anciens Traités de Calcul intégral, on se borne à faire observer que l'intégrale $\int_a^b \varepsilon\, dx$ tend vers zéro, puisque ε tend lui-même vers zéro avec h, et il reste

$$\lim \frac{\Delta I}{h} = \frac{dI}{d\alpha} = \int_a^b f'_\alpha(x, \alpha)\, dx,$$

d'où cette règle, due à Leibnitz :

Règle. — *La dérivée de l'intégrale $\int_a^b f(x, \alpha) dx$ par rapport au paramètre α, lorsque les limites a et b sont des constantes absolues, s'obtient en remplaçant, sous le signe $\int$, la fonction f par sa dérivée, prise par rapport au paramètre.*

322. Mais le raisonnement ci-dessus est insuffisant : ε ne tend vers zéro avec h que si x (aussi bien que α) reste fixe, et dans l'intégrale $\int_a^b \varepsilon\, dx$, x varie de a à b. On n'a donc pas le droit d'affirmer que cette intégrale ait pour limite zéro : un cas analogue s'est déjà présenté dans la question de l'intégration des séries.

Pour que l'intégrale eût sûrement zéro pour limite il faudrait

que, pour toutes les valeurs de h de module suffisamment petit, pour toutes les valeurs de x comprises entre a et b, et pour $\alpha = \alpha_0$, la fonction $\varepsilon(x, \alpha, h)$ demeurât inférieure, en valeur absolue, à un nombre donné, ε', aussi petit qu'on voudrait; l'intégrale $\int_a^b \varepsilon\, dx$ serait alors inférieure à $\varepsilon'(b-a)$, et aurait bien zéro pour limite ([1]). La règle serait alors applicable, et donnerait la dérivée de I, pour $\alpha = \alpha_0$. Il paraît difficile de préciser les conditions nécessaires et suffisantes auxquelles doit satisfaire la fonction $f(x, \alpha)$ pour qu'il en soit ainsi; aussi se bornera-t-on à indiquer un cas particulier, très étendu, où la règle s'applique en toute sécurité.

323. Ce cas est celui où la fonction $f(x, \alpha + h)$ vérifie la formule de Taylor réduite aux deux premiers termes :

$$f(x, \alpha + h) - f(x, \alpha) = h f'_\alpha(x, \alpha) + \frac{h^2}{2} f''_{\alpha^2}(x, \alpha + \theta h).$$

Cela suppose (n° 53) :

1° Que $f(x, \alpha)$ et $f'_\alpha(x, \alpha)$ sont des fonctions continues de *la variable* α, lorsque α varie entre deux limites α_1, α_2; et cela quelle que soit la valeur attribuée à x entre a et b;

2° Que f''_{α^2} est finie et déterminée quand α reste entre α_1 et α_2, et x entre a et b.

On a en ce cas

$$(2)\qquad \begin{cases} \dfrac{\Delta I}{h} = \displaystyle\int_a^b \frac{f(x, \alpha + h) - f(x, \alpha)}{h}\, dx \\ \quad = \displaystyle\int_a^b f'_\alpha(x, \alpha)\, dx + \frac{h}{2} \int_a^b f''_{\alpha^2}(x, \alpha + \theta h)\, dx. \end{cases}$$

Or, *si aucune des limites a, b n'est infinie,* la dernière intégrale, au second membre, est finie, puisque, par hypothèse, f''_{α^2} ne devient infinie pour aucune des valeurs de α et x respectivement comprises entre α_1 et α_2, a et b : le produit de cette intégrale

([1]) A condition encore qu'aucune des limites, a et b, ne soit infinie.

par $\frac{1}{2}h$ tend donc vers zéro avec h, et, à la limite, on a bien

$$\frac{dI}{d\alpha} = \int_a^b f'_\alpha(x, \alpha)\, dx$$

pour toutes les valeurs de α comprises entre α_1 et α_2.

C. Q. F. D.

324. Si les conditions du n° **323** (ou des conditions analogues) ne sont pas remplies, ou si l'intégrale donnée a une de ses limites infinie, on ne peut appliquer avec sécurité la règle de dérivation; une discussion spéciale peut devenir nécessaire dans chaque cas particulier.

325. Remarque. — La remarque suivante simplifie cette discussion dans le cas des limites infinies, si l'on suppose remplies les conditions du n° **323**.

On a en effet, d'après (2), *a et b étant supposés finis,*

$$(3) \qquad \frac{\Delta I}{h} = \int_a^b f'_\alpha(x, \alpha)\, dx + \frac{h}{2}\int_a^b f''_{\alpha^2}(x, \alpha + \theta h)\, dx.$$

Supposons que b tende vers l'infini; la limite du second membre, pour $h = 0$, sera celle de son premier terme, à savoir

$$\int_a^\infty f'_\alpha(x, \alpha)\, dx,$$

si l'intégrale

$$\int_a^\infty f''_{\alpha^2}(x, \alpha + \theta h)\, dx$$

a une valeur finie : en ce cas donc, la règle de Leibnitz sera sûrement applicable.

Voici au contraire un *exemple d'illégitimité* de la règle de dérivation, dans le cas d'une limite infinie.

Soit l'intégrale

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\, dx,$$

qui est finie et déterminée (n° **300**); c'est dès lors une constante absolue, que l'on démontre d'ailleurs être égale à $\frac{\pi}{2}$. Faisons le

changement de variable $x = \alpha y$, α étant une constante positive; il vient

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx = \int_0^\infty \frac{\sin \alpha y}{y}\,dy.$$

La dérivée du second membre par rapport à α doit être nulle, puisque cette intégrale a pour valeur une constante absolue; or en appliquant la règle, on trouverait, pour cette dérivée,

$$\int_0^\infty \cos \alpha y\,dy,$$

expression évidemment indéterminée.

326. Si les limites a et b de l'intégrale proposée (1) sont, non plus des constantes absolues, mais des *fonctions du paramètre* α, on trouve la dérivée en appliquant la règle de dérivation des fonctions composées. On a

$$\frac{dI}{d\alpha} = \frac{\partial I}{\partial b}\frac{db}{d\alpha} + \frac{\partial I}{\partial a}\frac{da}{d\alpha} + \int_a^b f'_\alpha(x, \alpha)\,dx.$$

La dérivée, $\frac{\partial I}{\partial b}$, de $\int_a^b f(x, \alpha)\,dx$ par rapport à la limite supérieure, b, étant $f(b, \alpha)$ (n° 265) et $\frac{\partial I}{\partial a}$ étant de même $-f(a, \alpha)$, il vient

$$\frac{dI}{d\alpha} = f(b, \alpha)\frac{db}{d\alpha} - f(a, \alpha)\frac{da}{d\alpha} + \int_a^b f'_\alpha(x, \alpha)\,dx.$$

Intégration des différentielles totales.

327. **Problème.** — *Étant donnée une expression de la forme* $X\,dx + Y\,dy + Z\,dz$, *où* X, Y, Z *sont des fonctions de trois variables indépendantes* x, y, z, *reconnaître s'il existe une fonction* u, *de* x, y, z, *dont cette expression soit la différenrentielle totale, et trouver cette fonction* u, *si elle existe.*

On a supposé, pour simplifier l'écriture, qu'il n'y avait que trois variables indépendantes; l'énoncé s'étend de suite à n variables.

Traitons d'abord le problème pour deux variables seulement, l'expression donnée étant $X\,dx + Y\,dy$.

Si la fonction u existe, on aura par définition

$$\frac{\partial u}{\partial x} = X, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = Y.$$

Dérivant la première de ces relations par rapport à x et la seconde par rapport à y, on obtient

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\, \partial y} = \frac{\partial X}{\partial y}, \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial y\, \partial x} = \frac{\partial Y}{\partial x},$$

d'où la relation de condition

$$(4) \qquad \frac{\partial X}{\partial y} = \frac{\partial Y}{\partial x}.$$

On trouve ainsi une condition *nécessaire* pour que $X\,dx + Y\,dy$ soit une différentielle exacte, du; je dis que cette condition est *suffisante*, c'est-à-dire que, si elle est vérifiée, la fonction u existe : pour l'établir on va former cette fonction.

La dérivée de u par rapport à x doit être égale à X, c'est-à-dire que $\frac{\partial u}{\partial x} = X$; on en déduit, en intégrant par rapport à x,

$$(5) \qquad u = \int_{x_0}^{x} X\,dx + v,$$

x_0 étant une constante absolue, choisie à volonté, et v une constante par rapport à x, c'est-à-dire *une fonction de* y; dans l'intégrale, y est traité comme constante.

Il faut maintenant déterminer v de manière que $\frac{\partial u}{\partial y}$ soit égal à Y : à cet effet, dérivons les deux membres de (5) par rapport à y, en appliquant la règle de dérivation sous le signe $\int$. On aura

$$Y = \frac{\partial u}{\partial y} = \int_{x_0}^{x} \frac{\partial X}{\partial y}\,dx + \frac{\partial v}{\partial y}.$$

Mais, d'après l'hypothèse (4), $\frac{\partial X}{\partial y} = \frac{\partial Y}{\partial x}$; donc

$$Y(x, y) = \int_{x_0}^{x} \frac{\partial Y}{\partial x}\,dx + \frac{\partial v}{\partial y} = Y(x, y) - Y(x_0, y) + \frac{\partial v}{\partial y},$$

ou

$$\frac{\partial v}{\partial y} = Y(x_0, y).$$

Cette relation n'offre aucun caractère d'impossibilité, puisque les deux membres sont des fonctions de y *seul*, x ayant disparu : on en tire, en intégrant par rapport à y,

$$v = \int_{y_0}^{y} Y(x_0, y)\,dy + C;$$

y_0 désigne une constante absolue, quelconque, et C une constante par rapport à y, c'est-à-dire une constante absolue, puisque v n'est fonction que de y.

On a ainsi pour u l'expression

$$(6) \qquad u = \int_{x_0}^{x} X(x, y)\,dx + \int_{y_0}^{y} Y(x_0, y)\,dy + \text{const.}$$

Au second membre, x_0 et y_0 sont des constantes arbitraires que l'on choisira de manière à simplifier les calculs; dans la première intégrale, y est traité comme une constante. La fonction u existe donc, et est donnée par (6), ce qui établit le théorème ([1]).

328. Passons maintenant au cas de trois variables indépendantes. On voit, comme plus haut, qu'il est *nécessaire*, pour que $X\,dx + Y\,dy + Z\,dz$ soit une différentielle exacte, que l'on ait identiquement, quels que soient x, y, z,

$$(7) \qquad \frac{\partial X}{\partial y} = \frac{\partial Y}{\partial x}, \qquad \frac{\partial X}{\partial z} = \frac{\partial Z}{\partial x}, \qquad \frac{\partial Y}{\partial z} = \frac{\partial Z}{\partial y}.$$

Je dis que ces conditions sont *suffisantes* : montrons pour cela que, si elles sont vérifiées, la fonction u, définie par la formule analogue à (6),

$$(8) \qquad \begin{cases} u = \displaystyle\int_{x_0}^{x} X(x, y, z)\,dx \\ \qquad + \displaystyle\int_{y_0}^{y} Y(x_0, y, z)\,dy + \int_{z_0}^{z} Z(x_0, y_0, z)\,dz + \text{const.}, \end{cases}$$

([1]) Deux fonctions, u et U, données par (6) et répondant à des valeurs différentes de x_0 et y_0, ont mêmes dérivées, X et Y, par rapport à x et y; elles ne diffèrent donc que d'une constante, c'est-à-dire que le second membre de (6) ne contient, en réalité, qu'*une* constante arbitraire, additive.

a pour dérivées partielles, par rapport à x, y, z, les fonctions X, Y, Z : dans la première intégrale y et z, dans la seconde z, sont traités comme des constantes. On a immédiatement

$$\frac{\partial u}{\partial x} = X(x, y, z).$$

En second lieu :

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \int_{x_0}^{x} \frac{\partial X}{\partial y} dx + Y(x_0, y, z),$$

et, puisque $\frac{\partial X}{\partial y} = \frac{\partial Y}{\partial x}$,

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial y} &= \int_{x_0}^{x} \frac{\partial Y}{\partial x} dx + Y(x_0\, y, z)\\ &= Y(x, y, z) - Y(x_0, y, z) + Y(x_0, y, z) = Y(x, y, z).\end{aligned}$$

Enfin

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \int_{x_0}^{x} \frac{\partial}{\partial z} X(x, y, z)\, dx + \int_{y_0}^{y} \frac{\partial}{\partial z} Y(x_0, y, z)\, dy + Z(x_0, y_0, z),$$

ou, en vertu de (7),

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial z} &= \int_{x_0}^{x} \frac{\partial}{\partial x} Z(x, y, z)\, dx + \int_{y_0}^{y} \frac{\partial}{\partial y} Z(x_0, y, z)\, dy + Z(x_0, y_0, z)\\ &= Z(x, y, z) - Z(x_0, y, z) + Z(x_0, y, z) - Z(x_0, y_0, z) + Z(x_0, y_0, z)\\ &= Z(x, y, z).\end{aligned}$$

C. Q. F. D.

Les formules (7) et (8) s'étendent immédiatement au cas d'un nombre quelconque de variables indépendantes.

329. Exemples. — 1° Soit l'expression

$$f(x)\, dx + \varphi(y)\, dy;$$

c'est une différentielle exacte, car $\frac{\partial}{\partial y} f(x) = \frac{\partial}{\partial x} \varphi(y) = 0$; et

$$u = \int_{x_0}^{x} f(x)\, dx + \int_{y_0}^{y} \varphi(y)\, dy + \text{const.},$$

ce qui était évident *a priori*.

2° L'expression $\frac{y\, dx - x\, dy}{x^2 + y^2}$ est une différentielle exacte, comme

on le vérifie de suite par (4), et l'on a

$$u = \int_{x_0}^{x} \frac{y\,dx}{x^2+y^2} - \int_{y_0}^{y} \frac{x_0\,dy}{x_0^2+y^2} + \text{const.}$$

La seconde intégrale disparaît si l'on prend $x_0 = 0$, et il reste

$$u = \int_0^x \frac{y}{x^2+y^2}\,dx + \text{const.} = \text{arc tang}\,\frac{x}{y} + \text{const.}$$

III. — SÉRIE DE FOURIER.

330. **Lemme.** — On a, lorsque m est un entier non nul,

$$(1)\qquad \int_a^{a+2\pi} \sin mx\,dx = -\frac{1}{m}(\cos mx)_a^{a+2\pi} = 0,$$

résultat qui subsiste évidemment pour $m = 0$.

De même

$$(2)\qquad \int_a^{a+2\pi} \cos mx\,dx = \begin{cases} 0, & \text{si} \quad m \gtrless 0, \\ 2\pi, & \text{si} \quad m = 0. \end{cases}$$

Soient maintenant m et n deux entiers positifs; on a

$$(3)\quad \left\{ \begin{aligned} &\int_a^{a+2\pi} \sin mx \cos nx\,dx \\ &= \frac{1}{2}\int_a^{a+2\pi} \sin(m+n)x\,dx + \frac{1}{2}\int_x^{a+2\pi} \sin(m-n)x\,dx = 0; \end{aligned} \right.$$

$$(4)\quad \left\{ \begin{aligned} &\int_a^{a+2\pi} \sin mx \sin nx\,dx \\ &= \frac{1}{2}\int_a^{a+2\pi} [\cos(m-n)x - \cos(m+n)x]\,dx = 0, \quad \text{si} \quad m \gtrless n, \\ & = \pi, \quad \text{si} \quad m = n; \end{aligned} \right.$$

$$(5)\quad \left\{ \begin{aligned} &\int_a^{a+2\pi} \cos mx \cos nx\,dx \\ &= \frac{1}{2}\int_a^{a+2\pi} [\cos(m-n)x + \cos(m+n)x]\,dx = 0, \quad \text{si} \quad m \gtrless n, \\ & = \pi, \quad \text{si} \quad m = n. \end{aligned} \right.$$

331. Cela posé, supposons qu'une fonction, $f(x)$, soit représentable, entre $x = a$ et $x = a + 2\pi$, par un développement uniformément convergent de la forme

$$(6) \quad \begin{cases} f(x) = A_0 + A_1 \cos x + A_2 \cos 2x + \ldots + A_n \cos nx + \ldots \\ \qquad\qquad\quad + B_1 \sin x + B_2 \sin 2x + \ldots + B_n \sin nx + \ldots; \end{cases}$$

il est aisé de calculer les coefficients A et B. Intégrons en effet les deux membres de (6) entre a et $a + 2\pi$; l'intégrale du second membre est la somme des intégrales des différents termes, puisque la série est supposée uniformément convergente ; il vient ainsi

$$\int_a^{a+2\pi} f(x)\, dx = 2\pi A_0,$$

car tous les autres termes, au second membre, sont nuls, en vertu de (1) et (2).

Donc

$$A_0 = \frac{1}{2\pi} \int_a^{a+2\pi} f(x)\, dx,$$

ce qui détermine A_0.

Pour calculer A_n, multiplions les deux membres de (6) par $\cos nx$, et intégrons ensuite de a à $a + 2\pi$; il vient, en tenant compte de (5),

$$\int_a^{a+2\pi} f(x) \cos nx\, dx = \pi A_n,$$

car tous les autres termes, au second membre, sont nuls, en vertu de (3) et de (5).

De même

$$\int_a^{a+2\pi} f(x) \sin nx\, dx = \pi B_n,$$

ce qui donne

$$(7) \quad A_n = \frac{1}{\pi} \int_a^{a+2\pi} f(x) \cos nx\, dx, \qquad B_n = \frac{1}{\pi} \int_a^{a+2\pi} f(x) \sin nx\, dx.$$

Telles sont les expressions cherchées des coefficients.

332. Théorème de Dirichlet. — Ces calculs supposent essentiellement que $f(x)$ est développable en série de la forme (6) et

que cette série est non seulement convergente, mais uniformément convergente entre a et $a+2\pi$.

Dans quel cas sera-t-on sûr qu'il en est ainsi, c'est-à-dire dans quel cas la série

$$(8)\quad \left\{\begin{array}{l} A_0+A_1\cos x+\ldots+A_n\cos nx+\ldots \\ \quad +B_1\sin x+\ldots+B_n\sin nx+\ldots, \end{array}\right.$$

où les A et B sont remplacés par leurs valeurs (7), sera-t-elle uniformément convergente et aura-t-elle pour somme $f(x)$?

Nous ne traiterons pas cette importante question, dont la solution demande d'assez longs développements; bornons-nous à indiquer le résultat.

Si $f(x)$ est une fonction finie et continue entre a et $a+2\pi$, pouvant toutefois posséder un nombre fini de discontinuités sans passage par l'infini, et si elle n'a, dans l'intervalle considéré, qu'un nombre fini de maxima et de minima, la série (8), *dite* de Fourier, *représente la fonction entre a et $a+2\pi$.*

Il faut observer que, si $f(x)$ présente des discontinuités, sans passage par l'infini, entre a et $a+2\pi$, les intégrales qui définissent les coefficients A_n et B_n sont néanmoins bien déterminées et finies, et qu'il n'y a dès lors aucune indétermination dans les valeurs de ces coefficients (n° 303) [1].

Dans le Cours de seconde année, nous donnerons la démonstration d'un théorème analogue à celui de Dirichlet pour une fonction d'une variable imaginaire, mais avec des restrictions relatives à la continuité de la fonction.

333. **Remarque I.** — Le théorème précédent offre un grand intérêt analytique. Il permet d'exprimer, à l'aide d'une série dont les termes sont continus, des fonctions discontinues, et aussi de représenter par une même série deux ou plusieurs fonctions différentes : voici comment ce dernier point doit s'entendre.

Soient $\varphi_1(x)$ et $\varphi_2(x)$ deux fonctions de x, continues par

[1] La série de Fourier donne la valeur exacte de $f(x)$ en tous les points (de l'axe des x) où la fonction est continue; en un point de discontinuité, elle donne la demi-somme des deux valeurs de $f(x)$ en ce point.

exemple entre a et $a+2\pi$; soit b une valeur de x comprise dans cet intervalle. Désignons par $f(x)$ une fonction égale à $\varphi_1(x)$ entre a et b, et à $\varphi_2(x)$ entre b et $a+2\pi$: $f(x)$ est une fonction continue de a à b sauf *une* discontinuité possible en b; on peut donc la développer en série de Fourier :

$$f(x) = A_0 + A_1 \cos x + \ldots \\ + B_1 \sin x + \ldots,$$

et l'on a ainsi une série qui, entre a et b, représente $\varphi_1(x)$ et, entre b et $a+2\pi$, représente $\varphi_2(x)$. On pourrait de même supposer qu'il y a trois, quatre, ... fonctions φ différentes.

Exemple. — Cherchons la série de Fourier qui représente $\varphi_1(x) = 1$ entre 0 et π, et $\varphi_2(x) = -1$ entre π et 2π.

On a

$$A_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos nx\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} 1.\cos nx\,dx + \frac{1}{\pi}\int_{\pi}^{2\pi}(-1)\cos nx\,dx,$$

car $f(x) = 1$ entre 0 et π, et $= -1$ entre π et 2π. On en conclut $A_n = 0$.

De même

$$B_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sin nx\,dx - \frac{1}{\pi}\int_{\pi}^{2\pi}\sin nx\,dx$$
$$= -\frac{1}{n\pi}(\cos nx)_0^{\pi} + \frac{1}{n\pi}(\cos nx)_{\pi}^{2\pi} = \begin{cases} 0, & \text{si } n \text{ est pair,} \\ \dfrac{4}{n\pi}, & \text{si } n \text{ impair.}\end{cases}$$

Donc, en observant que A_0 est nul aussi, on a

$$f(x) = \frac{4}{\pi}\left(\sin x + \frac{1}{3}\sin 3x + \frac{1}{5}\sin 5x + \ldots\right):$$

sous une autre forme, la série

$$\sin x + \frac{1}{3}\sin 3x + \frac{1}{5}\sin 5x + \ldots$$

est égale à $\frac{\pi}{4}$, quand x est compris entre 0 et π, et à $-\frac{\pi}{4}$, quand x est compris entre π et 2π.

334. **Remarque II.** — Il résulte de la Remarque qui précède

que, dans l'intervalle de b à $a+2\pi$, *inférieur à* 2π, on pourra représenter une fonction donnée, $\varphi(x)$, par une infinité de séries de Fourier; car il suffira de se donner arbitrairement une fonction $\varphi_1(x)$ entre a et b, et de former la série qui représente $\varphi_1(x)$ entre a et b, et $\varphi(x)$ entre b et $a+2\pi$.

Application. Développement en série de cosinus. — Soit $a=-\pi$, $b=0$, $a+2\pi=\pi$; désignons par $\varphi(x)$ une fonction donnée et prenons pour $\varphi_1(x)$, entre $-\pi$ et o, la fonction

$$\varphi_1(x)=\varphi(-x).$$

Développons en série de Fourier, de $-\pi$ à $+\pi$, la fonction $f(x)$, qui est égale à $\varphi_1(x)$, c'est-à-dire à $\varphi(-x)$, entre $-\pi$ et o, et à $\varphi(x)$ entre o et π : cette fonction est paire; $f(x)\sin nx$ est donc une fonction impaire, et l'on a, par suite (n° 263, 4°),

$$\pi B_n=\int_{-\pi}^{+\pi} f(x)\sin nx\,dx=0.$$

De même $f(x)\cos nx$ est une fonction paire, et, par suite (n° 263, 4°),

$$(9)\qquad \left\{\begin{aligned} \pi A_n &= \int_{-\pi}^{+\pi} f(x)\cos nx\,dx = 2\int_0^{\pi}\varphi(x)\cos nx\,dx,\\ \pi A_0 &= \int_0^{\pi}\varphi(x)\,dx.\end{aligned}\right.$$

Il vient ainsi, pour x compris entre $-\pi$ et $+\pi$,

$$f(x)=A_0+A_1\cos x+A_2\cos 2x+\ldots,$$

les A ayant les valeurs (9); c'est-à-dire, puisque $f(x)$ est égal à $\varphi(x)$ entre o et π,

$$\varphi(x)=A_0+A_1\cos x+A_2\cos 2x+\ldots,$$

développement de $\varphi(x)$ en série de cosinus, valable entre $x=0$ et $x=\pi$.

Développement en série de sinus. — Si l'on avait choisi $\varphi_1(x)$, entre $-\pi$ et o, par la condition

$$\varphi_1(x)=-\varphi(-x),$$

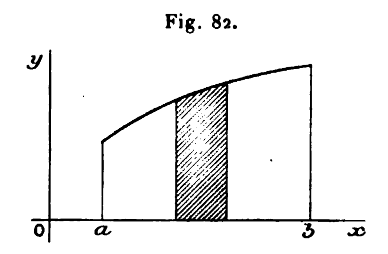
la fonction $f(x)$ définie plus haut eût été une fonction impaire : alors les A_n sont nuls, les B_n ont des expressions analogues à (9), et l'on obtient ainsi un développement de $\varphi(x)$, valable encore entre o et π, ne contenant que des sinus.

IV. — CALCUL APPROCHÉ DES INTÉGRALES DÉFINIES.

335. Quand il n'est pas possible de calculer la valeur exacte d'une intégrale définie, on a recours, dans la pratique, à des méthodes d'approximation qui vont être exposées. L'une d'elles, sur laquelle on ne reviendra pas, est le *développement en série* de la fonction sous le signe $\int$; on limite ce développement à quelques termes, qu'on intègre séparément.

336. Méthode des trapèzes. — Pour calculer $\int_a^b f(x)dx$, c'est-à-dire l'*aire* comprise entre l'axe des x, la courbe $y = f(x)$ et les deux ordonnées $x = a$, $x = b$ (*fig.* 82), on la divise en

Fig. 82.



aires plus petites en menant des ordonnées intermédiaires. On substitue ensuite à chacun des trapèzes curvilignes ainsi obtenus le trapèze rectiligne de mêmes sommets, et la somme des aires des trapèzes rectilignes donne une valeur approchée de l'intégrale proposée.

Si la courbe $y = f(x)$ est tracée, il sera bon de mener des ordonnées intermédiaires équidistantes; si, au contraire, on ne connaît pas exactement la courbe, mais seulement la valeur de y

pour certaines valeurs de x, on pourra se borner à mener les ordonnées qui correspondent à ces valeurs de l'abscisse.

337. Interpolation. — On remplace la courbe $y = f(x)$ par une autre qui s'en rapproche entre les limites d'intégration, $y = \varphi(x)$, et l'aire correspondant à celle-ci fournira une approximation de l'aire cherchée.

Supposons que, pour des valeurs $x = a_1, a_2, \ldots, a_n$, comprises entre a et b, la fonction $f(x)$ ait des valeurs $y_1, y_2, \ldots, y_n$: on peut choisir pour $\varphi(x)$ le polynome d'ordre $n-1$ qui, pour $x = a_1, \ldots, a_n$, est égal à $y_1, \ldots, y_n$, et dont l'expression classique est

$$\varphi(x) = y_1 \frac{(x-a_2)\ldots(x-a_n)}{(a_1-a_2)\ldots(a_1-a_n)} + \ldots + y_n \frac{(x-a_1)\ldots(x-a_{n-1})}{(a_n-a_1)\ldots(a_n-a_{n-1})}.$$

Si l'on intègre ce polynome entre a et b, on obtient, pour valeur approchée de l'aire primitive, l'expression

$$\int_a^b \varphi(x)\,dx = y_1 I_1 + y_2 I_2 + \ldots + y_n I_n,$$

en désignant, pour abréger, par $I_1, \ldots, I_n$ les intégrales

$$I_1 = \int_a^b \frac{(x-a_2)\ldots(x-a_n)}{(a_1-a_2)\ldots(a_1-a_n)}\,dx,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

qui ne dépendent pas de la fonction $f(x)$, et dont le calcul théorique n'offre aucune difficulté, puisqu'elles portent chacune sur un polynome entier en x.

338. Méthode de Cotes. — Il n'est pas nécessaire de calculer les intégrales I dans chaque cas particulier; le calcul peut être fait une fois pour toutes à l'aide d'un changement de variable. Posons, en effet,

$$x = a + (b-a)\theta, \qquad \text{d'où} \qquad dx = (b-a)\,d\theta;$$
$$a_1 = a + (b-a)\theta_1,$$
$$a_2 = a + (b-a)\theta_2,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$a_n = a + (b-a)\theta_n;$$

il vient

$$I_1 = (b-a)\int_0^1 \frac{(\theta-\theta_2)(\theta-\theta_3)\ldots(\theta-\theta_n)}{(\theta_1-\theta_2)(\theta_1-\theta_3)\ldots(\theta_1-\theta_n)}\,d\theta.$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

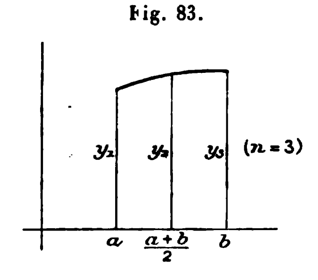
$$I_n = (b-a)\int_0^1 \frac{(\theta-\theta_1)(\theta-\theta_2)\ldots(\theta-\theta_{n-1})}{(\theta_n-\theta_1)(\theta_n-\theta_2)\ldots(\theta_n-\theta_{n-1})}\,d\theta.$$

Les quantités $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n$ sont égales respectivement aux rapports dans lesquels $a_1, a_2, \ldots$ divisent l'intervalle ab. Si donc on adopte toujours le même mode de division, on pourra calculer une fois pour toutes les intégrales qui figurent dans l'expression de $I_1, \ldots, I_n$; appelons-les $K_1, \ldots, K_n$; il viendra

$$\int_a^b \varphi(x)\,dx = (b-a)(K_1 y_1 + \ldots + K_n y_n).$$

Cotes suppose qu'on a divisé l'intervalle ab en parties égales, *et* que le point a_1 coïncide avec a, le point a_n avec b.

Fig. 83.



On a alors

$$\theta_1 = 0, \qquad \theta_2 = \frac{1}{n-1}, \qquad \theta_3 = \frac{2}{n-1}, \qquad \ldots, \qquad \theta_n = 1.$$

Développons le calcul en supposant $n = 3$; il vient

$$K_1 = \int_0^1 \frac{\left(\theta-\frac{1}{2}\right)(\theta-1)}{\left(-\frac{1}{2}\right)(-1)}\,d\theta = \int_0^1 (2\theta^2 - 3\theta + 1)\,d\theta = \frac{1}{6},$$

et, de même,

$$K_2 = \frac{2}{3}, \qquad K_3 = \frac{1}{6};$$

d'où l'expression approchée de l'aire (*fig.* 83)

$$\frac{b-a}{6}(y_1+4y_2+y_3).$$

On trouverait ainsi, pour $n=4$,

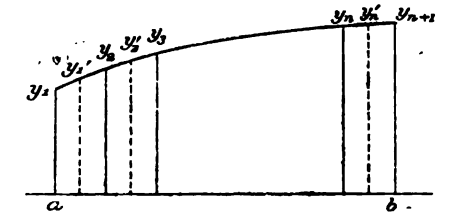
$$\frac{b-a}{8}(y_1+3y_2+3y_3+y_4);$$

pour $n=5$,

$$\frac{b-a}{90}(7y_1+32y_2+12y_3+32y_4+7y_5).$$

339. Méthode de Simpson. — On divise l'aire en n parties par des ordonnées équidistantes; on a ainsi à évaluer n trapèzes curvilignes. Pour évaluer approximativement chacun de ces trapèzes, on en mesure l'ordonnée médiane et l'on applique la formule de Cotes pour $n=3$. Si donc $y_1, y_2, \ldots, y_{n+1}$ (*fig.* 84) désignent les

Fig. 84.



longueurs des ordonnées primitives, $y'_1, y'_2, \ldots, y'_n$ celles des ordonnées médianes, l'aire sera donnée par la formule approchée

$$\frac{b-a}{6n}[(y_1+4y'_1+y_2)+\ldots+(y_n+4y'_n+y_{n+1})],$$

c'est-à-dire

$$\frac{b-a}{6n}[y_1+2y_2+2y_3+\ldots+2y_n+y_{n+1}+4y'_1+4y'_2+\ldots+4y'_n].$$

TROISIÈME PARTIE.

APPLICATIONS GÉOMÉTRIQUES.

CHAPITRE I.

THÉORIE DU CONTACT; ENVELOPPES.

I. — THÉORIE DU CONTACT.

340. Généralités. — On peut définir une *courbe plane,* soit par la relation qui lie les coordonnées x, y d'un de ses points, soit en se donnant les expressions de x et y en fonction d'*un* paramètre ou argument t, sous la forme

$$x = x(t), \qquad y = y(t). \tag{1}$$

De même, pour une *surface,* on peut se donner soit l'équation $f(x, y, z) = 0$ qui lie les coordonnées x, y, z d'un point, soit l'expression de x, y, z en fonction de *deux* paramètres u et v :

$$x = x(u, v), \qquad y = y(u, v), \qquad z = z(u, v). \tag{2}$$

Dans ce dernier cas, l'équation cartésienne, $f(x, y, z) = 0$, s'obtiendrait en éliminant u et v entre les trois relations paramétriques.

Enfin, une *courbe gauche* peut être définie, soit par l'intersection de deux surfaces : $f(x, y, z) = 0$; $g(x, y, z) = 0$, soit par l'expression des coordonnées x, y, z en fonction d'*un* argument t :

$$x = x(t), \qquad y = y(t), \qquad z = z(t). \tag{3}$$

Les paramètres directeurs de la droite qui joint deux points sont proportionnels aux variations des trois coordonnées; donc, à la

limite, ceux de la tangente à la courbe (3), au point d'argument t, sont proportionnels à dx, dy, dz, c'est-à-dire à $x'(t)$, $y'(t)$, $z'(t)$.

De même, pour la surface (2), les paramètres directeurs d'une tangente quelconque, au point d'arguments u, v, sont proportionnels à dx, dy, dz, c'est-à-dire à $\frac{\partial x}{\partial u}du + \frac{\partial x}{\partial v}dv$, ...; et, en faisant varier le rapport $du : dv$, on obtient ainsi les directions de toutes les tangentes à la surface au point considéré. On vérifie de suite qu'elles sont dans un même plan.

341. Points simples sur les courbes ou surfaces. — Étant donnée la *courbe plane*

$$(1) \qquad x = x(t), \qquad y = y(t),$$

pour l'étudier au voisinage du point M, d'argument t_0, on supposera toujours que les fonctions $x(t)$, $y(t)$ sont développables en séries de Taylor, convergentes dans un certain cercle, ordonnées suivant les puissances croissantes de $t - t_0$: admettons, de plus, qu'à un point de la courbe, pris au voisinage de M, ne réponde qu'une seule valeur du paramètre t.

Le point M sera dit *simple* si les quantités $x'(t_0)$, $y'(t_0)$ ne sont pas nulles à la fois. Pour établir que cette définition est d'accord avec la notion géométrique ordinaire, coupons la courbe proposée par une droite, de coefficient angulaire quelconque, tracée à une distance infiniment petite du point M :

$$Y - y(t_0) + m[X - x(t_0)] = \varepsilon,$$

ε désignant un infiniment petit, et cherchons en combien de points, *voisins de* M, cette droite rencontre la courbe. A cet effet, remplaçons, dans l'équation de la droite, X et Y par $x(t)$ et $y(t)$, et posons, pour simplifier, $t - t_0 = \theta$; nous obtenons l'équation

$$y(t_0 + \theta) - y(t_0) + m[x(t_0 + \theta) - x(t_0)] = \varepsilon,$$

et nous devons chercher combien cette équation en θ a de solutions voisines de zéro.

Le premier membre, par hypothèse, est une fonction de θ, $f(\theta)$, développable en série de Taylor, convergente à l'intérieur d'un certain cercle; si $x'(t_0)$ et $y'(t_0)$ ne sont pas nuls à la fois, le

développement de $f(\theta)$ commence par un terme en θ, sinon par un terme en θ^n, n étant au moins égal à 2. Or on établira dans le Cours de seconde année que, si une série de puissances, $f(\theta)$, commence par un terme en θ^n, l'équation $f(\theta) = \varepsilon$, lorsque ε est assez petit, est satisfaite pour n valeurs de θ voisines de zéro.

Il résulte de là que, si n est supérieur à l'unité, une droite quelconque, tracée à une distance infiniment voisine du point M, coupe la courbe en n points voisins de M; par suite, le point M n'est simple que si n est égal à 1, c'est-à-dire si $x'(t_0)$ et $y'(t_0)$ ne sont pas nuls simultanément.

De même, sur la *courbe gauche* (3), le point d'argument t_0 sera simple si $x'(t_0), y'(t_0), z'(t_0)$ ne sont pas nuls à la fois, en supposant toujours les fonctions $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ développables en séries de Taylor convergentes, suivant les puissances de $t - t_0$.

Passons enfin au cas de la *surface* définie par

$$(2) \qquad x = x(u, v), \qquad y = y(u, v), \qquad z = z(u, v).$$

Nous supposerons qu'au voisinage de u_0, v_0 les trois fonctions ci-dessus sont développables en séries de Taylor convergentes, ordonnées suivant les puissances de $u - u_0$ et $v - v_0$, et nous dirons que le point M, d'arguments u_0, v_0, est *simple* si les trois expressions

$$(4) \qquad \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v} - \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v}, \qquad \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v}, \qquad \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}$$

ne s'annulent pas simultanément pour $u = u_0$, $v = v_0$.

On établit encore que cette définition concorde avec la conception géométrique; la démonstration rigoureuse est toutefois plus compliquée que la démonstration analogue indiquée pour une courbe.

Bornons-nous ici à vérifier ce résultat dans le cas où les fonctions $x(u, v)$, $y(u, v)$, $z(u, v)$ sont rationnelles en u et v; la surface (2) est alors algébrique. Si les trois expressions (4) s'annulent pour $u = u_0$, $v = v_0$, cela exprime géométriquement que les trois courbes algébriques, d'équations

$$x(u, v) = x(u_0, v_0), \qquad y(u, v) = y(u_0, v_0), \qquad z(u, v) = z(u_0, v_0),$$

où u, v sont les coordonnées courantes, courbes qui passent par

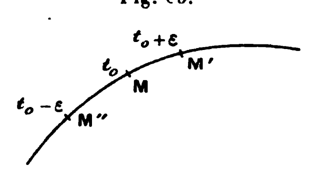
le point u_0, v_0, ont même tangente en ce point; par suite, deux quelconques d'entre elles y ont au moins deux intersections confondues. Coupons alors la surface (2) par une sécante parallèle à un axe de coordonnées, Oz par exemple, issue du point M, d'arguments u_0, v_0; les arguments u, v des points de rencontre vérifient les deux équations

$$x(u, v) = x(u_0, v_0), \qquad y(u, v) = y(u_0, v_0),$$

et, en vertu de ce qui précède, la solution $u = u_0$, $v = v_0$ compte pour deux, au moins. Sous une autre forme, toute sécante parallèle à un des axes de coordonnées et issue de M a, avec la surface, deux intersections au moins confondues en M : ce point n'est donc pas simple, dans le sens géométrique du mot.

342. Si le point M (*fig.* 85), d'argument t_0, est *simple* sur

Fig. 85.



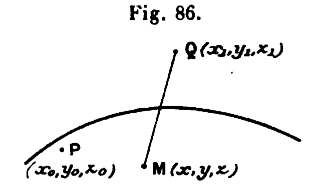
une courbe plane ou gauche, les deux points M' et M'', d'arguments $t_0 + \varepsilon$ et $t_0 - \varepsilon$, sont, sur la courbe, de part et d'autre de M, pour ε suffisamment petit. Cela résulte immédiatement des relations

$$x(t_0 + \varepsilon) - x(t_0) = \varepsilon x'(t_0) + \ldots,$$
$$x(t_0 - \varepsilon) - x(t_0) = -\varepsilon x'(t_0) + \ldots,$$

et des relations analogues pour y et z.

343. Distance à une surface d'un point infiniment voisin. —

Fig. 86.



Considérons, sur une surface, un point *simple* P (*fig.* 86), de

coordonnées x_0, y_0, z_0, et soit $Q(x_1, y_1, z_1)$ un point infiniment voisin de P et non situé sur la surface; une sécante quelconque, menée par Q, et *non parallèle au plan tangent en* P, coupe la surface en un point M voisin de P; on demande la valeur principale de la longueur infiniment petite QM, l'infiniment petit principal étant la distance PQ.

Si λ, μ, ν sont les cosinus directeurs de MQ, et x, y, z les coordonnées de M, on a

$$\frac{x_1 - x}{\lambda} = \frac{y_1 - y}{\mu} = \frac{z_1 - z}{\nu} = d,$$

$d =$ QM étant la longueur dont on demande la valeur principale. On tire de là $x = x_1 - \lambda d$; $y = \ldots$; $z = \ldots$, et, en portant ces valeurs dans l'équation $f(x, y, z) = 0$ de la surface, on obtient la relation

$$(1) \quad \begin{cases} 0 = f(x_1 - \lambda d, y_1 - \mu d, z_1 - \nu d) \\ = f(x_1, y_1, z_1) - d(\lambda f'_{x_1} + \mu f'_{y_1} + \nu f'_{z_1}) + d^2(\qquad), \end{cases}$$

en admettant que l'on puisse appliquer à la fonction $f(x_1 - \lambda d, \ldots)$ la formule de Taylor, réduite aux trois premiers termes.

Le point x_1, y_1, z_1 (Q) étant infiniment voisin de x_0, y_0, z_0 (P), les valeurs principales de $f'_{x_1}, f'_{y_1}, f'_{z_1}$ sont $f'_{x_0}, f'_{y_0}, f'_{z_0}$; la valeur principale du coefficient de d est ainsi $(\lambda f'_{x_0} + \mu f'_{y_0} + \nu f'_{z_0})$: cette quantité n'est pas nulle, car son évanouissement exprimerait que la direction λ, μ, ν de la sécante est parallèle au plan

$$(X - x_0) f'_{x_0} + (Y - y_0) f'_{y_0} + (Z - z_0) f'_{z_0} = 0,$$

qui touche la surface en P[1], et cette hypothèse a été expressément écartée. Dans le dernier membre de (1), les termes principaux sont donc, puisque le terme en d^2 est négligeable devant le terme en d,

$$f(x_1, y_1, z_1) - d(\lambda f'_{x_0} + \mu f'_{y_0} + \nu f'_{z_0}),$$

d'où l'on tire

$$\text{Valeur principale de } d = \frac{f(x_1, y_1, z_1)}{\lambda f'_{x_0} + \mu f'_{y_0} + \nu f'_{z_0}};$$

---

(1) Ce raisonnement suppose que $f'_{x_0}, f'_{y_0}, f'_{z_0}$ ne sont pas nuls à la fois, donc, comme on sait, que P est point simple de la surface, ainsi qu'on l'a admis.

ce qui montre, puisque le dénominateur n'est pas nul, que d est de l'ordre de $f(x_1, y_1, z_1)$.

En particulier, la *distance du point* Q *à la surface,* comptée sur la normale issue de Q, est de l'ordre de $f(x_1, y_1, z_1)$.

De même, la *distance à une courbe plane,* $f(x, y) = 0$, d'un point x_1, y_1, infiniment voisin de la courbe, est de l'ordre de $f(x_1, y_1)$.

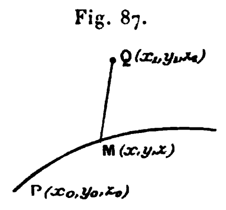
Remarque. — L'équation de la surface $f(x, y, z) = 0$ peut se mettre sous une infinité de formes; par exemple, en supposant que f soit un polynome entier, la surface $f = 0$ sera également représentée par $f^\alpha = 0$, α étant un nombre positif quelconque. Il semble alors, d'après la théorie précédente, que la distance d soit de l'ordre de f^α, résultat absurde, puisque α est quelconque. Mais on doit observer que : 1° si α est supérieur à l'unité, les dérivées partielles premières de f^α s'annulent en tout point de la surface $f = 0$, et en particulier au point x_0, y_0, z_0, hypothèse que l'on a écartée dans le raisonnement précédent; 2° si α est inférieur à l'unité, les dérivées partielles deviennent infinies au même point, et l'application faite de la formule de Taylor n'est plus légitime.

344. Distance à une courbe gauche d'un point infiniment voisin. — Soit, sur une courbe gauche,

$$f(x, y, z) = 0, \qquad g(x, y, z) = 0,$$

un point *simple* $P(x_0, y_0, z_0)$ (*fig.* 87); par un point $Q(x_1, y_1, z_1)$, voisin de P et non situé sur la courbe, on mène une sécante QM

Fig. 87.



coupant celle-ci en un point M voisin de P; on demande la valeur principale de la distance QM, en supposant que la sécante n'est pas parallèle à la tangente de la courbe au point P.

Gardons les notations du numéro précédent; il vient de même,

en désignant par d la distance QM,

$$(2)\quad 0 = f(x, y, z) = f(x_1, y_1, z_1) - d(\lambda f'_{x_1} + \mu f'_{y_1} + \nu f'_{z_1}) + d^2(\quad),$$

$$(3)\quad 0 = g(x, y, z) = g(x_1, y_1, z_1) - d(\lambda g'_{x_1} + \mu g'_{y_1} + \nu g'_{z_1}) + d^2(\quad).$$

Les valeurs principales des coefficients de d sont

$$\lambda f'_{x_0} + \mu f'_{y_0} + \nu f'_{z_0} \quad \text{et} \quad \lambda g'_{x_0} + \mu g'_{y_0} + \nu g'_{z_0};$$

une au moins de ces quantités n'est pas nulle : car, si la première par exemple était nulle, la direction λ, μ, ν de la sécante serait parallèle au plan tangent de la surface $f(x, y, z) = 0$ au point $P(x_0, y_0, z_0)$; l'évanouissement des deux quantités indiquerait donc que la sécante est parallèle à l'intersection des plans tangents en P aux surfaces $f = 0$, $g = 0$, c'est-à-dire à la tangente de la courbe C, ce qui est contraire à l'hypothèse ([1]).

Supposons, par exemple, $\lambda f'_{x_0} + \ldots \gtrless 0$; l'équation (2) se réduit, en ne gardant que les termes principaux, à

$$f(x_1, y_1, z_1) - d(\lambda f'_{x_0} + \mu f'_{y_0} + \nu f'_{z_0}) = 0,$$

ce qui montre que d est de l'ordre de $f(x_1, y_1, z_1)$. De même si $\lambda g'_{x_0} + \ldots \gtrless 0$, d est de l'ordre de $g(x_1, y_1, z_1)$, qui est, dès lors, le même que celui de $f(x_1, y_1, z_1)$. Mais si $\lambda g'_{x_0} + \ldots = 0$, le coefficient de d, dans l'équation (3), est infiniment petit, et cette équation montre alors que $g(x_1, y_1, z_1)$ est d'ordre supérieur à d, c'est-à-dire à $f(x_1, y_1, z_1)$.

Il résulte de là que, *dans tous les cas*, d est l'ordre de celle des quantités $f(x_1, y_1, z_1)$ et $g(x_1, y_1, z_1)$ dont l'ordre est le moins élevé, c'est-à-dire de la plus grande de ces quantités, en valeur absolue.

En particulier, *la distance de* Q *à la courbe*, comptée sur la

---

([1]) Ce raisonnement suppose :

1° Que $f'_{x_0}, f'_{y_0}, f'_{z_0}$ (et de même $g'_{x_0}, g'_{y_0}, g'_{z_0}$) ne sont pas nuls à la fois et, par suite, que P est un point simple sur les deux surfaces $f = 0$, $g = 0$;

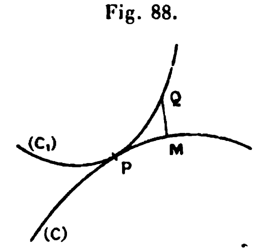
2° Que les plans tangents en P à ces deux surfaces sont distincts, c'est-à-dire que celles-ci ne se touchent pas en P.

Or, si l'une ou l'autre de ces conditions n'était pas remplie, la courbe commune aux surfaces $f = 0$, $g = 0$ aurait un point multiple en P, cas qui a été écarté.

normale menée de Q, est de l'ordre de la plus grande, en valeur absolue, des deux quantités $f(x_1, y_1, z_1)$, $g(x_1, y_1, z_1)$.

345. Définition du contact. — Soient C et C_1 (*fig.* 88) deux courbes ou surfaces pour lesquelles P est un point commun, simple sur chacune : si la distance à C d'un point *quelconque* Q,

Fig. 88.



infiniment voisin de P, pris sur C_1, est d'ordre $n+1$ par rapport à la longueur PQ, on dit que C_1 a, avec C, un contact d'ordre n au point P.

Le contact d'une courbe et de sa tangente est un exemple de contact du premier ordre.

346. Contact de deux courbes planes. — C étant la courbe

$$f(x, y) = 0,$$

et la courbe C_1 étant définie par

$$x = \varphi(t), \qquad y = \psi(t),$$

cherchons les conditions analytiques du contact d'ordre n en un point P : désignons par x_0, y_0 les coordonnées de P, par x_1, y_1 celles de Q. La distance de Q à la courbe C est (n° 343) de l'ordre de $f(x_1, y_1)$; tout revient donc à exprimer que $f(x_1, y_1)$ est d'ordre $n+1$ par rapport à PQ. Or, si t_0 et t_1 sont les arguments qui répondent aux points P et Q sur la courbe C_1, on a

$$\begin{aligned}\overline{PQ}^2 &= [\varphi(t_1) - \varphi(t_0)]^2 + [\psi(t_1) - \psi(t_0)]^2 \\ &= [(t_1 - t_0)\varphi'(t_0 + \varepsilon)]^2 + [(t_1 - t_0)\psi'(t_0 + \varepsilon')]^2,\end{aligned}$$

ce qui montre que la valeur principale de PQ est

$$(t_1 - t_0)\sqrt{\varphi'^2(t_0) + \psi'^2(t_0)}.$$

Le point P étant supposé simple sur C_1, $\varphi'(t_0)$ et $\psi'(t_0)$ ne sont pas nuls à la fois (n° **341**); donc PQ est de l'ordre de $t_1 - t_0$, et l'on a dès lors à écrire que $f(x_1, y_1)$ est d'ordre $(n+1)$ par rapport à $t_1 - t_0$. Or, si l'on pose pour abréger

$$f[\varphi(t), \psi(t)] = F(t),$$

on aura, en admettant que la formule de Taylor, réduite aux $n+2$ premiers termes, soit applicable à la fonction $F(t)$, au voisinage de t_0,

$$\begin{aligned} f(x_1, y_1) &= f[\varphi(t_1), \psi(t_1)] \\ &= F(t_1) = F(t_0) + (t_1 - t_0)F'(t_0) + \ldots\ldots \\ &\qquad + \frac{(t_1 - t_0)^n}{n!}F^n(t_0) + (t_1 - t_0)^{n+1}(\quad). \end{aligned}$$

Pour que le dernier membre soit d'ordre $n+1$ en $t_1 - t_0$, il faut et il suffit que l'on ait

$$F(t_0) = F'(t_0) = F''(t_0) = \ldots = F^n(t_0) = 0,$$

soit, en tout, $(n+1)$ conditions.

De là cette Règle :

Pour exprimer que la courbe C_1, $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, *a, avec la courbe* C, $f(x, y) = 0$, *un contact d'ordre* $n+1$ *au point d'argument* t_0, *on remplace, dans le premier membre de l'équation de* C, *x et y par leurs valeurs* $\varphi(t)$ *et* $\psi(t)$ *relatives à* C_1, *et l'on écrit que la fonction de t ainsi obtenue s'annule, avec ses n premières dérivées, pour* $t = t_0$.

347. Remarque. — Les deux courbes C et C_1 se traversent ou ne se traversent pas au point P selon que le contact est d'ordre pair ou impair. En effet, soit x_1, y_1 un point de C_1, voisin de P, et répondant à l'argument $t_1 = t_0 + \varepsilon$; si l'on substitue x_1, y_1 à x, y dans le premier membre, $f(x, y)$, de l'équation de la courbe C, le résultat est $F(t_1)$, c'est-à-dire

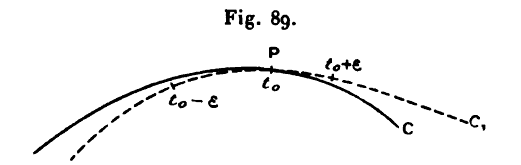
$$F(t_1) = \frac{1}{(n+1)!}(t_1 - t_0)^{n+1}F^{n+1}(t_0 + \theta\varepsilon),$$

quantité dont la valeur principale est

$$\frac{1}{(n+1)!}\varepsilon^{n+1}F^{n+1}(t_0).$$

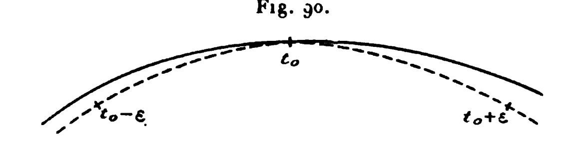
On voit ainsi que $F(t_1)$, c'est-à-dire $f(x_1, y_1)$, change ou ne change pas de signe avec ε, selon que $n+1$ est impair ou pair. En d'autres termes, les deux points de C_1 (*fig.* 89 et 90) dont

Fig. 89.



les arguments sont $t_0 - \varepsilon$ et $t_0 + \varepsilon$, et qui sont situés sur cette courbe, de part et d'autre de P (n° 342), sont de part et d'autre de la courbe $f(x, y) = 0$ ou du même côté de cette courbe, selon que $n+1$ est impair ou pair. Donc enfin, si n est pair, les deux

Fig. 90.



courbes C et C_1 se traversent (*fig.* 89), et si n est impair, elles ne se traversent pas au point P (*fig.* 90).

348. Si les deux courbes C et C_1 sont données sous la forme

$$y = y(x), \qquad y = Y(x),$$

on rentrera dans le cas ci-dessus en représentant C_1 par les équations

$$x = t, \qquad y = Y(t).$$

Alors on a

$$F(t) = Y(t) - y(t),$$

et les conditions précédentes de contact sont, en remplaçant t par x,

$$(4) \qquad \begin{cases} y\ (x) = Y\ (x), \\ y'\ (x) = Y'\ (x), \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ y^n(x) = Y^n(x). \end{cases}$$

relations symétriques par rapport à C et C_1. Donc, si une courbe plane a, avec une autre, un contact d'ordre n en un point, la

seconde aura, avec la première, un contact du même ordre en ce point.

En vertu des conditions (4), pour un contact d'ordre un, les deux courbes C et C_1 ont, au point donné, la même tangente; pour un contact d'ordre deux, elles ont en outre (n° 71) le même centre de courbure O; pour un contact d'ordre trois (*ibid.*), leurs développées, qui se touchent en O, ont même centre de courbure O_1 en ce point; et ainsi de suite. En d'autres termes, les centres de courbure des deux courbes et ceux de leurs développées successives sont les mêmes, de telle sorte que, pour un contact d'ordre n, les $(n-1)$ premiers centres de courbure, correspondant au point de contact, soient confondus.

Observons enfin que si les courbes C et C_1 sont données par

$$f(x,y)=0,\qquad f_1(x,Y)=0,$$

les conditions du contact d'ordre n, au point x, y, sont toujours les équations (4), où y', ..., y^n, Y', ..., Y^n désignent les dérivées successives de y et Y par rapport à x, dérivées qui se déduisent sans difficulté des équations des deux courbes (n° 66).

Corollaire. — D'après les équations (4), si deux courbes ont en un point, avec une troisième, un contact d'ordre n, elles ont entre elles un contact d'ordre n au même point.

349. Contact d'une courbe gauche et d'une surface. — Supposons que C soit la surface

$$f(x,y,z)=0,$$

et C_1 la courbe gauche

$$x=\varphi(t),\qquad y=\psi(t),\qquad z=\chi(t).$$

Soient encore x_0, y_0, z_0 les coordonnées de P; x_1, y_1, z_1 celles de Q; t_0 et t_1 les arguments de P et Q sur la courbe C_1.

Il faut, pour qu'il y ait contact d'ordre n entre C et C_1 au point P, que $f(x_1,y_1,z_1)$ soit d'ordre $(n+1)$ par rapport à PQ; or, la valeur principale de PQ est évidemment

$$(t_1-t_0)\sqrt{\varphi'^2(t_0)+\psi'^2(t_0)+\chi'^2(t_0)},$$

de sorte que PQ est de l'ordre de t_1-t_0 : on écarte le cas où l'on

aurait à la fois $\varphi'(t_0) = \psi'(t_0) = \chi'(t_0) = 0$, parce qu'alors le point P ne serait pas simple sur la courbe C_1 (n° **341**).

En posant

$$F(t) = f[\varphi(t), \psi(t), \chi(t)],$$

on a, comme au n° **346**,

$$f(x_1, y_1, z_1) = F(t_1) = F(t_0) + (t_1 - t_0)F'(t_0) + \ldots;$$

et, pour que le dernier membre soit d'ordre $(n+1)$ en $t_1 - t_0$, il faut et il suffit que l'on ait

$$F(t_0) = F'(t_0) = \ldots = F^n(t_0) = 0,$$

en tout $(n+1)$ conditions. On en déduit une *Règle* toute semblable à celle du n° **346**, et qu'il est inutile d'énoncer.

On voit, comme dans la Remarque du n° **347**, que la courbe et la surface se traversent ou ne se traversent pas, selon que le contact est d'ordre pair ou impair.

350. Contact de deux courbes gauches. — Soient C la courbe

$$f(x, y, z) = 0, \qquad g(x, y, z) = 0,$$

et C_1 la courbe

$$x = \varphi(t), \qquad y = \psi(t), \qquad z = \chi(t).$$

En gardant les notations du numéro précédent, il faut exprimer que la distance à la courbe C du point $Q(x_1, y_1, z_1)$, infiniment voisin de $P(x_0, y_0, z_0)$, sur C_1, est d'ordre $(n+1)$ par rapport à PQ; cette distance étant (n° **344**) de l'ordre de la plus grande des quantités $f(x_1, y_1, z_1)$, $g(x_1, y_1, z_1)$, il faut et il suffit que ces *deux* quantités soient d'ordre $n+1$ par rapport à PQ. Or PQ est de l'ordre de $t_1 - t_0$ (n° **349**), si l'on admet que P est un point simple sur C_1 : tout revient donc à écrire que $f(x_1, y_1, z_1)$ et $g(x_1, y_1, z_1)$ sont d'ordre $(n+1)$ en $t_1 - t_0$.

Si l'on pose

$$f[\varphi(t), \psi(t), \chi(t)] = F(t),$$
$$g[\varphi(t), \psi(t), \chi(t)] = G(t),$$

les conditions nécessaires et suffisantes du contact d'ordre n

sont dès lors

$$F(t_0) = F'(t_0) = \ldots = F^n(t_0) = 0,$$
$$G(t_0) = G'(t_0) = \ldots = G^n(t_0) = 0;$$

soit en tout $2(n+1)$ relations; et l'on est conduit encore à une *Règle* analogue aux précédentes.

351. Si les courbes C et C_1 sont représentées par

$$(C) \begin{cases} y = y(x), \\ z = z(x), \end{cases} \qquad (C_1) \begin{cases} y = Y(x), \\ z = Z(x), \end{cases}$$

on rentrera dans le cas ci-dessus en écrivant

$$(C_1) \qquad x = t, \quad y = Y(t), \quad z = Z(t);$$

d'où

$$F(t) = Y(t) - y(t), \qquad G(t) = Z(t) - z(t),$$

et les conditions du contact d'ordre n, au point x, y, z, sont, en remplaçant t par x,

$$(5) \qquad \begin{cases} y(x) = Y(x), & z(x) = Z(x), \\ y'(x) = Y'(x), & z'(x) = Z'(x), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots, & \ldots\ldots\ldots\ldots, \\ y^n(x) = Y^n(x), & z^n(x) = Z^n(x). \end{cases}$$

Elles sont symétriques par rapport aux deux courbes.

Enfin, si C et C_1 sont données par les équations

$$\begin{cases} f(x, y, z) = 0, \\ g(x, y, z) = 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} f_1(x, Y, Z) = 0, \\ g_1(x, Y, Z) = 0, \end{cases}$$

les conditions de contact d'ordre n, au point x, y, z, seront encore les relations (5), en désignant par $y', y'', \ldots, z', z'', \ldots, Y', Y'', \ldots, Z', Z'', \ldots$ les dérivées successives de y et z, Y et Z par rapport à x, dérivées qui se déduisent sans difficulté des équations des deux courbes.

Corollaire. — Si deux courbes gauches ont, avec une troisième courbe, un contact d'ordre n en un point, elles ont entre elles, en vertu de (5), un contact du même ordre en ce point.

352. Contact de deux surfaces. — Soient C la surface

$$f(x, y, z) = 0,$$

et C_1 la surface

$$x = \varphi(u, v), \qquad y = \psi(u, v), \qquad z = \chi(u, v).$$

Soient x_0, y_0, z_0 les coordonnées de P; x_1, y_1, z_1 celles d'un point Q, infiniment voisin de P, dans une direction quelconque, sur la surface C_1 : la distance de Q à C étant de l'ordre de $f(x_1, y_1, z_1)$, il faut, pour qu'il y ait contact d'ordre n entre C et C_1 au point P, que $f(x_1, y_1, z_1)$ soit d'ordre $n+1$ par rapport à PQ. Or, si u_0, v_0 et u_1, v_1 sont les valeurs des paramètres u, v qui correspondent à P et Q sur la surface C_1, on a

$$\overline{PQ}^2 = [\varphi(u_1, v_1) - \varphi(u_0, v_0)]^2 + \ldots = [(u_1 - u_0)\varphi'_{u_0} + (v_1 - v_0)\varphi'_{v_0} + \ldots]^2 + \ldots,$$

d'où l'on tire, pour la valeur principale de PQ, une expression ρ de la forme

$$\rho = \sqrt{M(u_1 - u_0)^2 + 2N(u_1 - u_0)(v_1 - v_0) + P(v_1 - v_0)^2},$$

en posant, pour simplifier,

$$M = \varphi'^2_{u_0} + \psi'^2_{u_0} + \chi'^2_{u_0}, \qquad N = \varphi'_{u_0}\varphi'_{v_0} + \psi'_{u_0}\psi'_{v_0} + \chi'_{u_0}\chi'_{v_0}, \qquad P = \varphi'^2_{v_0} + \psi'^2_{v_0} + \chi'^2_{v_0}.$$

Je dis que si l'on regarde $u_1 - u_0$ et $v_1 - v_0$ comme du premier ordre, ρ est aussi du premier ordre, quelle que soit la valeur réelle du rapport $\frac{v_1 - v_0}{u_1 - u_0}$: en effet, il ne pourrait en être autrement que pour les valeurs de ce rapport qui annulent le trinome sous le radical, mais il est aisé de voir que ces valeurs sont imaginaires. Formons, en effet, la quantité $MP - N^2$; d'après une formule classique de Lagrange, on a

$$MP - N^2 = (\varphi'_{u_0}\psi'_{v_0} - \varphi'_{v_0}\psi'_{u_0})^2 + (\varphi'_{u_0}\chi'_{v_0} - \varphi'_{v_0}\chi'_{u_0})^2 + (\psi'_{u_0}\chi'_{v_0} - \psi'_{v_0}\chi'_{u_0})^2,$$

et le second membre est essentiellement positif, ce qui démontre la proposition ([1]), c'est-à-dire que PQ est toujours du premier ordre en $u_1 - u_0$, $v_1 - v_0$.

([1]) $MP - N^2$ pourrait toutefois être nul si les trois carrés étaient nuls, c'est-à-dire si l'on avait

$$\frac{\varphi'_{u_0}}{\varphi'_{v_0}} = \frac{\psi'_{u_0}}{\psi'_{v_0}} = \frac{\chi'_{u_0}}{\chi'_{v_0}}.$$

En ce cas, le point P ne serait pas simple sur la surface C_1 (n° 341).

Il faut donc finalement exprimer que $f(x_1, y_1, z_1)$ est d'ordre $n+1$ par rapport à $u_1 - u_0$, $v_1 - v_0$, considérés comme du premier ordre.

Or, si l'on pose

$$f[\varphi(u, v), \psi(u, v), \chi(u, v)] = F(u, v),$$

on aura, par la formule de Taylor relative au cas de deux variables indépendantes,

$$f(x_1, y_1, z_1) = F(u_1, v_1) = F(u_0, v_0) + (u_1 - u_0) F'_{u_0} + (v_1 - v_0) F'_{v_0} + \ldots,$$

et les conditions du contact d'ordre n seront dès lors

$$\begin{array}{lllll} F(u_0, v_0) = 0, & F'_{u_0} = 0, & F''_{u_0^2} = 0, & \ldots, & F^n_{u_0^n} = 0, \\ & F'_{v_0} = 0, & F''_{u_0 v_0} = 0, & \ldots, & F^n_{u_0^{n-1} v_0} = 0, \\ & & F''_{v_0^2} = 0, & \ldots, & F^n_{v_0^n} = 0; \end{array}$$

soit, en tout, $1 + 2 + 3 + \ldots + (n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$ conditions.

De là cette *Règle :*

Pour exprimer que la surface C_1 :

$$x = \varphi(u, v), \qquad y = \psi(u, v), \qquad z = \chi(u, v),$$

a, avec la surface C :

$$f(x, y, z) = 0,$$

un contact d'ordre n au point d'arguments u_0 et v_0, on remplace, dans le premier membre de l'équation de C, *x, y et z par leurs valeurs $\varphi(u, v)$, $\psi(u, v)$, $\chi(u, v)$, relatives à* C_1, *et l'on écrit que la fonction de u, v ainsi obtenue s'annule, avec toutes ses dérivées partielles jusqu'à l'ordre n inclus, pour $u = u_0$, $v = v_0$.*

353. Si les équations de C et C_1 sont données sous la forme $z = z(x, y)$ et $z = Z(x, y)$, on rentrera dans le cas précédent, en posant, pour C_1,

$$(C_1) \qquad x = u, \qquad y = v, \qquad z = Z(u, v),$$

d'où

$$F(u, v) = Z(u, v) - z(u, v),$$

et les conditions du contact au point x, y s'écrivent, en remplaçant u et v par x et y,

$$z(x,y) = Z(x,y),$$
$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial Z}{\partial x}, \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial Z}{\partial y},$$
$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 Z}{\partial x^2}, \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} = \frac{\partial^2 Z}{\partial x\,\partial y}, \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 Z}{\partial y^2},$$
$$\ldots\ldots\ldots, \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \qquad \ldots\ldots\ldots,$$
$$\frac{\partial^n z}{\partial x^n} = \frac{\partial^n Z}{\partial x^n}, \qquad \frac{\partial^n z}{\partial x^{n-1}\,\partial y} = \frac{\partial^n Z}{\partial x^{n-1}\,\partial y}, \qquad \ldots, \qquad \frac{\partial^n z}{\partial y^n} = \frac{\partial^n Z}{\partial y^n}.$$

Ces conditions sont symétriques par rapport aux deux surfaces; on en déduit que si deux surfaces ont, en un point, un contact d'ordre n avec une troisième, elles ont entre elles un contact d'ordre n au même point.

D'après cela, en désignant par p, q, r, s, t les dérivées partielles premières et secondes de z par rapport à x et y, il faut, pour le contact du second ordre, que les deux surfaces aient, pour un système de valeurs de x, y, mêmes valeurs de z, p, q, r, s, t, et réciproquement. On peut dire aussi qu'en un point commun aux deux surfaces, il y aura contact du second ordre si p, q, r, s, t sont les mêmes en ce point pour les deux surfaces. Pour le contact du premier ordre en un point commun, il faut et il suffit que p et q, c'est-à-dire les plans tangents, soient les mêmes.

354. Corollaire. — *Une transformation de contact change deux surfaces qui ont entre elles, en un point, un contact d'ordre n en deux surfaces qui ont également, entre elles, un contact d'ordre n.*

Car si $z = f(x, y)$ et $Z = F(X, Y)$ sont deux surfaces transformées l'une de l'autre, les coordonnées X, Y, Z du point qui répond à un point x, y, z sont fonctions de x, y, z, p, q; et, de plus, les dérivées partielles d'ordre quelconque de Z en X et Y sont des fonctions de x, y, z et des dérivées partielles de z en x et y jusqu'au même ordre (n° 108).

Donc, à deux surfaces pour lesquelles, en un point x, y, z, les valeurs des dérivées partielles homologues de z sont les mêmes jusqu'à l'ordre n inclus, correspondent deux surfaces pour

lesquelles, en un point X, Y, Z, les valeurs des dérivées partielles homologues de Z sont également les mêmes jusqu'à l'ordre n, ce qui établit le Corollaire.

355. Autre point de vue. — Reprenons les conditions de contact de la courbe C_1 :

$$x = \varphi(t), \qquad y = \psi(t), \qquad z = \chi(t),$$

et de la surface C :

$$f(x, y, z) = 0.$$

Étant posé

$$f[\varphi(t), \psi(t), \chi(t)] = F(t),$$

ces conditions sont, en désignant par t_0 l'argument du point de contact,

$$F(t_0) = 0, \qquad F'(t_0) = 0, \qquad \ldots, \qquad F^n(t_0) = 0.$$

Or, la surface C coupe la courbe C_1 en des points dont les arguments t vérifient évidemment l'équation

$$f[\varphi(t), \psi(t), \chi(t)] = 0, \qquad \text{c'est-à-dire} \qquad F(t) = 0;$$

et comme on a

$$F(t) = F(t_0) + (t - t_0) F'(t_0) + \ldots + \frac{(t - t_0)^{n+1}}{(n+1)!} F^{n+1}(t_0 + \varepsilon),$$

on voit que $(t - t_0)^{n+1}$ est en facteur dans $F(t)$, c'est-à-dire que le point t_0 compte pour $n+1$ dans le nombre des points où la courbe est coupée par la surface (n° 341).

On peut donc dire, sous une autre forme, que si une courbe C_1 et une surface C ont un contact d'ordre n en un point, C_1 et C ont, en ce point, $n+1$ intersections confondues. Mêmes conclusions pour le contact de deux courbes planes, ou de deux courbes gauches.

II. — ENVELOPPES DES COURBES PLANES ET DES SURFACES.

Enveloppe d'une famille de courbes planes.

356. Rappelons brièvement les résultats établis dans le Cours de Mathématiques spéciales.

Soit $f(x, y, \lambda) = 0$ l'équation d'une famille simplement infinie

de courbes planes, λ désignant un paramètre, variable d'une courbe à l'autre. Une de ces courbes, répondant à la valeur c du paramètre, $f(x, y, c) = 0$, est coupée par la courbe infiniment voisine $f(x, y, c + dc) = 0$, en des points dont la position limite s'obtient comme il suit. Si l'on tient compte de $f(x, y, c) = 0$, l'équation $f(x, y, c + dc) = 0$ s'écrit, après division par dc,

$$0 = f'_c(x, y, c) + \frac{1}{2} dc\, f''_{c^2}(x, y, c + \theta\, dc),$$

et, à la limite, en faisant $dc = 0$, on voit que les points considérés sont à l'intersection des deux courbes

$$(1) \qquad f(x, y, c) = 0, \qquad f'_c(x, y, c) = 0.$$

Le lieu de ces points, dits *points caractéristiques,* se nomme l'*enveloppe des courbes données;* son équation s'obtient en éliminant le paramètre c entre les deux relations (1). On démontrerait aisément, par la méthode qui sera appliquée plus bas, au n° 359, que :

L'enveloppe est tangente à chaque enveloppée aux points caractéristiques situés sur celle-ci (¹).

Remarques. — 1° Si les courbes proposées ont des points multiples, la courbe obtenue en éliminant c entre les équations (1) comprendra, en dehors de l'enveloppe, le lieu de ces points multiples. Car les coordonnées x et y d'un point multiple de la courbe $f(x, y, c) = 0$ sont des fonctions du paramètre c, qui vérifient identiquement les relations

$$(2) \qquad f(x, y, c) = 0, \qquad \frac{\partial f}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 0;$$

et aussi celle que l'on obtient en dérivant la première par rapport au paramètre, à savoir

$$\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial c} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial c} + \frac{\partial f}{\partial c} = 0,$$

(¹) On pourrait aussi chercher directement s'il existe une enveloppe, c'est-à-dire une courbe à laquelle toutes les courbes données restent tangentes; en raisonnant comme on le fera au n° 364, on trouverait encore que l'équation de l'enveloppe s'obtient en éliminant c entre $f = 0$ et $f'_c = 0$.

équation qui, en tenant compte de (2), se réduit à $f'_c = 0$. Ainsi, les points multiples des courbes proposées satisfont, comme les points caractéristiques, aux relations $f = 0$, $f'_c = 0$, et le lieu de ceux-ci comprendra dès lors le lieu de ceux-là.

2° L'enveloppe des courbes $f(x, y, \lambda, \mu) = 0$, où λ et μ sont deux paramètres liés par l'équation $\varphi(\lambda, \mu) = 0$, s'obtient par la règle précédente. Considérons μ comme fonction de λ; on devra joindre à $f(x, y, \lambda, \mu) = 0$ la relation obtenue en annulant la dérivée du premier membre par rapport à λ, à savoir

$$(3) \qquad \frac{\partial f}{\partial \lambda} + \frac{\partial f}{\partial \mu}\frac{d\mu}{d\lambda} = 0.$$

Mais l'équation de liaison, $\varphi(\lambda, \mu) = 0$, dérivée par rapport à λ, donne

$$(4) \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial \lambda} + \frac{\partial \varphi}{\partial \mu}\frac{d\mu}{d\lambda} = 0,$$

d'où, en éliminant $\frac{d\mu}{d\lambda}$ entre (3) et (4),

$$(5) \qquad \frac{\partial f}{\partial \lambda}\frac{\partial \varphi}{\partial \mu} - \frac{\partial f}{\partial \mu}\frac{\partial \varphi}{\partial \lambda} = 0.$$

On obtiendra donc l'équation de l'enveloppe en éliminant λ et μ entre les équations $f = 0$, $\varphi = 0$ et la relation (5).

Enveloppe d'une famille de surfaces simplement infinie.

357. **Définitions.** — Dans le cas d'une famille de surfaces, deux cas sont à distinguer, selon que cette famille est *simplement* ou *doublement* infinie, c'est-à-dire selon que son équation générale contient *un* ou *deux* paramètres variables. Nous traiterons d'abord le premier cas.

Considérons les surfaces représentées par l'équation

$$f(x, y, z, \lambda) = 0,$$

où λ est un paramètre variable. Une de ces surfaces, répondant à la valeur c du paramètre, et que nous appellerons la surface c,

$$(1) \qquad f(x, y, z, c) = 0,$$

coupe la surface infiniment voisine $c + dc$,

$$(2) \qquad f(x, y, z, c + dc) = 0,$$

selon une courbe représentée par les deux équations (1) et (2), et dont il est aisé de trouver la position limite. En effet, en tenant compte de (1) et divisant par dc, l'équation (2) s'écrit :

$$(3) \qquad 0 = f'_c(x, y, z, c) + \frac{1}{2}\, dc\, f''_{c^2}(x, y, z, c + \theta\, dc),$$

et, à la limite, pour $dc = 0$, la courbe considérée a pour équations

$$(4) \qquad \begin{cases} f\,(x, y, z, c) = 0, \\ f'_c(x, y, z, c) = 0. \end{cases}$$

On la nomme *caractéristique*. Par définition, l'*enveloppe* des surfaces (1), dites *enveloppées*, est le lieu des caractéristiques (4); on obtient donc l'équation de l'enveloppe en éliminant c entre les deux équations (4).

358. La caractéristique qui correspond à l'enveloppée c, et qu'on appellera *caractéristique* c, coupe l'enveloppée infiniment voisine $(c + dc)$ en des points donnés par les équations

$$f(x, y, z, c) = 0, \qquad f'_c(x, y, z, c) = 0, \qquad f(x, y, z, c + dc) = 0.$$

Or, la dernière équation s'écrit, en tenant compte des deux premières, et en divisant par $\overline{dc}^2$,

$$\frac{1}{2} f''_{c^2}(x, y, z, c) + \frac{dc}{6} f'''_{c^3}(x, y, z, c + \theta\, dc) = 0,$$

de sorte que, à la limite, les points considérés sont donnés par les trois équations

$$(5) \qquad f = 0, \qquad f'_c = 0, \qquad f''_{c^2} = 0.$$

Le lieu de ces points, dits *points caractéristiques*, et dont on obtient l'équation en éliminant c entre les trois relations (5), est une courbe, évidemment située sur l'enveloppe, et qu'on nomme *arête de rebroussement* de cette enveloppe.

Il y a, sur chaque caractéristique c, un certain nombre de points

caractéristiques qui sont donnés par les solutions, en x, y, z, communes aux trois équations (5).

359. Théorème I. — *Chaque enveloppée est tangente à l'enveloppe tout le long de la caractéristique correspondante.*

Soit l'enveloppée $f(x, y, z, c_0) = 0$; prenons un point quelconque P, de coordonnées x_0, y_0, z_0, sur la caractéristique c_0 correspondante; on a

$$(6)\qquad f(x_0, y_0, z_0, c_0) = 0, \qquad f'_c(x_0, y_0, z_0, c_0) = 0.$$

Désignons par x_1, y_1, z_1 un point Q de l'enveloppe, voisin de x_0, y_0, z_0, et d'ailleurs quelconque; pour établir la proposition, il faut, d'après la théorie du contact, montrer que $f(x_1, y_1, z_1, c_0)$ est du second ordre par rapport à la distance PQ.

Or Q, étant sur l'enveloppe, est sur une caractéristique c_1, voisine de la caractéristique c_0; en sorte qu'on a

$$(7)\qquad f(x_1, y_1, z_1, c_1) = 0, \qquad f'_c(x_1, y_1, z_1, c_1) = 0.$$

Alors on peut écrire

$$\begin{aligned} f(x_1, y_1, z_1, c_0) &= f(x_1, y_1, z_1, c_1 + \overline{c_0 - c_1}) \\ &= f(x_1, y_1, z_1, c_1) + (c_0 - c_1) f'_c(x_1, y_1, z_1, c_1) \\ &\quad + \frac{1}{2}(c_0 - c_1)^2 f''_{c^2}(x_1, y_1, z_1, c_1) + \ldots, \end{aligned}$$

et l'on voit ainsi, en tenant compte de (7), que $f(x_1, y_1, z_1, c_0)$ est du second ordre en $(c_0 - c_1)$. Tout se réduit alors à établir que la distance PQ est du premier ordre *au plus* en $c_0 - c_1$; or, la seconde des relations (7) s'écrit

$$(8)\qquad \left\{ \begin{aligned} 0 &= f'_c(x_1, y_1, z_1, c_1) \\ &= f'_c(x_0 + \overline{x_1 - x_0}, \ldots, c_0 + \overline{c_1 - c_0}) \\ &= f'_c(x_0, y_0, z_0, c_0) \\ &\quad + (x_1 - x_0) f''_{cx} + (y_1 - y_0) f''_{cy} + (z_1 - z_0) f''_{cz} + (c_1 - c_0) f''_{c^2} + \ldots \end{aligned} \right.$$

Le premier terme, $f'_c(x_0, y_0, z_0, c_0)$, est nul d'après (6); il résulte alors de cette équation (en excluant le cas particulier où $f''_{c^2}(x_0, y_0, z_0, c_0)$ serait nul, c'est-à-dire où le point P serait sur l'arête de rebroussement) que $x_1 - x_0$, $y_1 - y_0$ et $z_1 - z_0$ ne

peuvent être tous trois d'ordre supérieur à $c_0 - c_1$ (¹). Donc la distance PQ, qui a pour expression

$$PQ = \sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2 + (z_1 - z_0)^2},$$

quantité plus grande en valeur absolue que $x_1 - x_0$, $y_1 - y_0$, $z_1 - z_0$, ne peut être d'ordre supérieur à $c_0 - c_1$; PQ est donc du premier ordre, *au plus*, en $c_0 - c_1$, ce qui établit le théorème.

360. Théorème II. — *L'arête de rebroussement a un contact du premier ordre avec chaque caractéristique* (c) *aux points caractéristiques situés sur celle-ci; elle a, aux mêmes points, un contact du second ordre avec l'enveloppée correspondante* (c).

Soit c_0 la valeur du paramètre qui correspond à une enveloppée; désignons par $P(x_0, y_0, z_0)$ un des points caractéristiques situés sur la caractéristique c_0 : on a

$$(9)\quad f(x_0, y_0, z_0, c_0) = 0, \quad f'_c(x_0, y_0, z_0, c_0) = 0, \quad f''_{c^2}(x_0, y_0, z_0, c_0) = 0.$$

De même, si c_1 est le paramètre d'une enveloppée infiniment voisine, la caractéristique c_1 aura un point caractéristique $Q(x_1, y_1, z_1)$ infiniment voisin de P, et l'on aura de même

$$(10)\quad f(x_1, y_1, z_1, c_1) = 0, \quad f'_c(x_1, y_1, z_1, c_1) = 0, \quad f''_{c^2}(x_1, y_1, z_1, c_1) = 0.$$

Je dis que l'arête de rebroussement a, *au point* P, un contact du second ordre avec l'enveloppée $f(x, y, z, c_0) = 0$, et un contact du premier ordre avec la caractéristique c_0 :

$$f(x, y, z, c_0) = f'_c(x, y, z, c_0) = 0;$$

il suffit, pour cela, d'après la théorie du contact, d'établir que les quantités

$$f(x_1, y_1, z_1, c_0) \quad \text{et} \quad f'_c(x_1, y_1, z_1, c_0)$$

(¹) Car si $x_1 - x_0$, $y_1 - y_0$, $z_1 - z_0$ étaient d'ordre supérieur à $c_1 - c_0$, il y aurait dans l'équation (8) un seul terme d'ordre plus petit que tous les autres, à savoir $(c_1 - c_0) f''_{c^2}$: ce terme ne pouvant se réduire avec aucun autre, le dernier membre de (8) ne pourrait être nul.

sont respectivement du troisième et du second ordre par rapport à PQ. Or on a

$$f(x_1, y_1, z_1, c_0) = f(x_1, y_1, z_1, c_1) + (c_0 - c_1) f'_c(x_1, y_1, z_1, c_1)$$
$$+ \frac{1}{2}(c_0 - c_1)^2 f''_{c^2}(x_1, y_1, z_1, c_1) + \frac{1}{6}(c_0 - c_1)^3 f'''_{c^3}(\quad) + \ldots,$$

$$f'_c(x_1, y_1, z_1, c_0) = f'_c(x_1, y_1, z_1, c_1) + (c_0 - c_1) f''_{c^2}(x_1, y_1, z_1, c_1)$$
$$+ \frac{1}{2}(c_0 - c_1)^2 f'''_{c^3}(x_1, y_1, z_1, c_1) + \ldots,$$

et l'on voit ainsi, en tenant compte de (10), que $f(x_1, y_1, z_1, c_0)$ et $f'_c(x_1, y_1, z_1, c_0)$ sont respectivement du troisième et du second ordre en $c_0 - c_1$.

Tout se réduit dès lors à établir que PQ est *au plus* d'ordre *un* par rapport à $c_0 - c_1$. Or la troisième des relations (10) donne

$$0 = f''_{c^2}(x_1, y_1, z_1, c_1) = f''_{c^2}(x_0 + \overline{x_1 - x_0}, \ldots, c_0 + \overline{c_1 - c_0})$$
$$= f''_{c^2}(x_0, y_0, z_0, c_0) + (x_1 - x_0) f'''_{c^2 x} + (y_1 - y_0) f'''_{c^2 y}$$
$$+ (z_1 - z_0) f'''_{c^2 z} + (c_1 - c_0) f'''_{c^3} + \ldots;$$

le premier terme, $f''_{c^2}(x_0, y_0, z_0, c_0)$, est nul d'après (9); on en conclut, comme au numéro précédent, et en supposant

$$f'''_{c^3}(x_0, y_0, z_0, c_0) \gtrless 0,$$

c'est-à-dire en excluant certains points particuliers de l'arête de rebroussement, que $x_1 - x_0$, $y_1 - y_0$, $z_1 - z_0$ ne peuvent être à la fois d'ordre supérieur à $c_0 - c_1$. Par suite, PQ est *au plus* du premier ordre en $c_0 - c_1$, ce qui établit le théorème.

361. **Surfaces développables.** — Une surface développable est, par définition, l'enveloppe d'un plan mobile dont l'équation contient *un* paramètre. Les *caractéristiques,* intersections d'un plan et du plan infiniment voisin de la famille, sont des *droites.* Sur chaque caractéristique, il n'y a qu'un point caractéristique, puisque les trois équations (5) représentent trois plans, qui n'ont qu'un point commun. D'après le théorème II, chaque droite caractéristique touche en *un* point une courbe gauche, l'*arête de rebroussement* de la développable. On peut donc dire qu'une surface développable est le lieu des tangentes *d'une* courbe gauche.

Les théorèmes I et II montrent, en outre, que chaque plan de la famille touche la surface développable tout le long d'une droite (caractéristique), et qu'il a un contact du second ordre avec l'arête de rebroussement, au point où celle-ci est touchée par la caractéristique correspondante.

Pour les cônes, l'arête de rebroussement se réduit à un point, le sommet.

Remarque. — La polaire réciproque d'une surface développable, c'est-à-dire de l'enveloppe de plans en nombre simplement infini, est le lieu des pôles de ces plans, c'est-à-dire une courbe. Réciproquement, la polaire réciproque d'une courbe quelconque est l'enveloppe des plans polaires de la courbe, c'est-à-dire une développable.

Cela posé, nous avons établi que les caractéristiques d'une développable quelconque, Δ, sont les tangentes d'une courbe gauche, C: transformons ce résultat par polaires réciproques. A la développable Δ correspond une courbe, γ; aux caractéristiques de Δ, intersections de deux plans tangents à Δ et infiniment voisins, répondent des droites joignant deux points voisins de γ, c'est-à-dire les tangentes de γ. De même, aux tangentes de la courbe C répondent les caractéristiques d'une développable, δ. Le théorème envisagé, à savoir que les caractéristiques d'une développable quelconque Δ sont les tangentes d'une courbe C, se transforme donc en celui-ci: Les tangentes d'une courbe gauche *quelconque*, γ, sont les caractéristiques d'une développable, δ; ainsi :

Toute développable est le lieu des tangentes d'une courbe gauche; inversement, les tangentes de toute courbe gauche engendrent une développable.

On reviendra sur ce théorème, au point de vue analytique, au n° 387.

362. **Surfaces enveloppes de sphères.** — Dans une famille simplement infinie de sphères, les *caractéristiques,* intersections de deux sphères infiniment voisines, sont des *cercles;* donc chaque sphère touche l'enveloppe suivant un cercle qui est la caractéristique correspondante. Sur chaque cercle caractéristique il y a

deux points caractéristiques, puisque les trois sphères (5) ont deux points communs à distance finie. Par suite, chaque cercle caractéristique touche en deux points une courbe fixe (arête de rebroussement), et la sphère enveloppée correspondante a un contact du second ordre avec cette courbe aux deux mêmes points.

Enveloppe d'une famille de surfaces doublement infinie.

363. Soient maintenant les surfaces, en nombre doublement infini, représentées par l'équation

$$f(x, y, z, \lambda, \mu) = 0, \tag{11}$$

où λ et μ sont deux paramètres. Une de ces surfaces (λ, μ) coupe une surface infiniment voisine $(\lambda + d\lambda, \mu + d\mu)$ le long de la courbe représentée par les équations

$$f(x, y, z, \lambda, \mu) = 0, \qquad f(x, y, z, \lambda + d\lambda, \mu + d\mu) = 0.$$

La seconde s'écrit, en tenant compte de la première, et en appliquant une formule du n° 33,

$$d\lambda f'_\lambda(x, y, z, \lambda + \theta\, d\lambda, \mu + d\mu) + d\mu f'_\mu(x, y, z, \lambda, \mu + \theta' d\mu) = 0;$$

et, à la limite, on voit que les deux surfaces considérées passent, *quel que soit le rapport de $d\lambda$ à $d\mu$*, par les points déterminés par les trois équations

$$f(x, y, z, \lambda, \mu) = 0, \quad f'_\lambda(x, y, z, \lambda, \mu) = 0, \quad f'_\mu(x, y, z, \lambda, \mu) = 0. \tag{12}$$

En d'autres termes, une des surfaces (11) et *toutes* les surfaces infiniment voisines de la famille passent par les points (12); le lieu de ces points, dits *points caractéristiques,* se nomme l'*enveloppe* des surfaces de la famille : ce lieu est une surface dont l'équation s'obtient en éliminant λ et μ entre les trois équations (12).

Théorème. — *Chaque enveloppée touche l'enveloppe aux points caractéristiques correspondants.*

On le démontrerait par une méthode semblable à celle du n° 359.

Exemple. — Une surface est l'enveloppe de ses plans tangents qui sont en nombre doublement infini, lorsque la surface n'est pas développable.

Les points caractéristiques, au nombre de un par plan, sont les points de contact des plans tangents.

III. — ENVELOPPES DE COURBES DANS L'ESPACE; CONGRUENCES.

---

364. Famille simplement infinie. — Soient les courbes gauches

$$(1) \qquad f(x, y, z, \alpha) = 0, \qquad \varphi(x, y, z, \alpha) = 0,$$

dont les équations dépendent d'*un* paramètre α. Elles engendrent une surface, dont on obtient l'équation par l'élimination du paramètre, mais en général elles n'admettent pas d'enveloppe proprement dite, c'est-à-dire qu'il n'existe pas de courbe fixe à laquelle toutes les courbes de la famille soient tangentes.

Supposons, en effet, qu'une pareille courbe existe, et soient x, y, z les coordonnées du point où elle touche la courbe (1) de paramètre α : ces coordonnées sont des fonctions de α, que nous désignerons par $x(\alpha)$, $y(\alpha)$, $z(\alpha)$, et la courbe cherchée sera représentée paramétriquement par $x = x(\alpha)$, $y = y(\alpha)$, $z = z(\alpha)$. En écrivant que le point de contact considéré est sur la courbe α, nous obtenons d'abord les deux équations

$$(2) \qquad f[x(\alpha), y(\alpha), z(\alpha), \alpha] = 0, \qquad \varphi[x(\alpha), \ldots, \alpha] = 0.$$

Exprimons maintenant que les tangentes en ce point à la courbe fixe et à la courbe α ont même direction : les paramètres directeurs étant pour la première tangente (n° 340)

$$x'(\alpha), \quad y'(\alpha), \quad z'(\alpha),$$

et pour la seconde, qui est l'intersection des plans tangents aux deux surfaces (1),

$$f'_y \varphi'_z - f'_z \varphi'_y, \quad f'_z \varphi'_x - f'_x \varphi'_z, \quad f'_x \varphi'_y - f'_y \varphi'_x,$$

les conditions de parallélisme s'écrivent

$$(3) \qquad \frac{f'_y \varphi'_z - f'_z \varphi'_y}{x'_\alpha} = \frac{f'_z \varphi'_x - f'_x \varphi'_z}{y'_\alpha} = \frac{f'_x \varphi'_y - f'_y \varphi'_x}{z'_\alpha},$$

en supposant, dans les numérateurs, x, y et z remplacés par $x(\alpha)$, $y(\alpha)$, $z(\alpha)$. On a ainsi, pour déterminer les *trois* fonctions inconnues x, y, z du paramètre α, les *quatre* relations (2) et (3), ce qui montre, *a priori,* que le problème ne doit pas avoir de solution.

On peut remplacer le système (2), (3) par un système plus simple, ne contenant plus les dérivées des fonctions inconnues. Car, en dérivant par rapport à la variable indépendante, α, les relations (2), on trouve

$$(4) \qquad f'_x x'_\alpha + f'_y y'_\alpha + f'_z z'_\alpha + f'_\alpha = 0, \qquad \varphi'_x x'_\alpha + \ldots + \varphi'_\alpha = 0,$$

et, si l'on utilise les valeurs proportionnelles de x'_α, y'_α, z'_α fournies par (3), il reste

$$(5) \qquad f'_\alpha = 0, \qquad \varphi'_\alpha = 0,$$

équations qui peuvent remplacer les équations (3) : car (2) et (3) entraînent (2) et (5), comme on vient de le voir; inversement, (2) et (5) entraînent (3), puisque (2) entraîne (4), qui, si l'on tient compte de (5), donne évidemment (3).

En d'autres termes, il reste, pour déterminer les *trois* fonctions inconnues $x(\alpha)$, $y(\alpha)$, $z(\alpha)$, les *quatre* relations

$$(6) \qquad \begin{cases} f(x, y, z, \alpha) = 0, & \varphi(x, y, z, \alpha) = 0, \\ f'_\alpha = 0, & \varphi'_\alpha = 0. \end{cases}$$

L'élimination de $x(\alpha)$, $y(\alpha)$, $z(\alpha)$ donne une équation $F(\alpha) = 0$, qui doit être vérifiée identiquement pour que l'enveloppe existe. Dans ce cas, les équations (6) se réduisent à trois et donnent $x(\alpha)$, $y(\alpha)$, $z(\alpha)$, c'est-à-dire les coordonnées paramétriques d'un point de l'enveloppe; au contraire, si $F(\alpha)$ n'est pas identiquement nul, il n'y a pas d'enveloppe.

365. Remarque. — Considérons la courbe $\alpha + d\alpha$, d'équations

$$f(x, y, z, \alpha + d\alpha) = 0, \qquad \varphi(x, y, z, \alpha + d\alpha) = 0,$$

et développons f et φ, en nous bornant aux termes en $d\alpha$:

$$f + f'_\alpha \, d\alpha = 0, \qquad \varphi + \varphi'_\alpha \, d\alpha = 0.$$

Pour que cette courbe rencontre en un point la courbe α, d'équations $f = 0$, $\varphi = 0$, il faut que les quatre équations

$$(7) \qquad f = 0, \qquad \varphi = 0, \qquad f'_\alpha = 0, \qquad \varphi'_\alpha = 0,$$

soient compatibles, quel que soit α, en x, y, z. Or ce sont précisément les équations (6). Par suite, la condition $F(\alpha) = 0$, qu'on obtient en éliminant x, y et z, exprime aussi qu'une courbe quelconque de la famille rencontre en un point la courbe infiniment voisine, en négligeant les infiniment petits d'ordre supérieur à $d\alpha$. Le lieu du point de rencontre est l'enveloppe trouvée plus haut, puisque les équations (7), qui définissent ce point, sont les mêmes que (6).

366. Application. — Soient les droites

$$(8) \qquad x = az + p, \qquad y = bz + q,$$

où a, b, p, q désignent des fonctions données d'un paramètre α. Les équations $f'_\alpha = 0$, $\varphi'_\alpha = 0$, sont ici

$$(9) \qquad \frac{da}{d\alpha} z + \frac{dp}{d\alpha} = 0, \qquad \frac{db}{d\alpha} z + \frac{dq}{d\alpha} = 0,$$

et l'élimination de x, y, z entre (8) et (9) donne de suite la condition d'existence d'une courbe enveloppe, c'est-à-dire d'une courbe à laquelle les droites (8) sont tangentes :

$$(10) \qquad \frac{da}{d\alpha}\frac{dq}{d\alpha} - \frac{db}{d\alpha}\frac{dp}{d\alpha} = 0.$$

Sous une autre forme, si l'on se reporte aux propriétés des surfaces développables (n° 361), on peut dire que la relation (10) exprime que la surface *réglée* engendrée par les droites (8) est une *développable*.

Exemple. — Pour les droites

$$(11) \quad x = -z \sin\alpha + \cos\alpha + \alpha \sin\alpha, \qquad y = z \cos\alpha + \sin\alpha - \alpha \cos\alpha,$$

la condition précédente s'écrit

$$-\cos\alpha(\cos\alpha - \cos\alpha + \alpha\sin\alpha) + \sin\alpha(-\sin\alpha + \sin\alpha + \alpha\cos\alpha) = 0;$$

elle est identiquement satisfaite. L'enveloppe existe donc; elle est définie paramétriquement par les équations (11) auxquelles on ajoute $f'_\alpha = 0$, c'est-à-dire

$$-z\cos\alpha + \alpha\cos\alpha = 0.$$

On trouve ainsi

$$z = \alpha, \quad x = \cos\alpha, \quad y = \sin\alpha,$$

pour les équations paramétriques de l'enveloppe.

367. Famille doublement infinie; congruences. — Les courbes

(1) $$f(x, y, z, \alpha, \beta) = 0, \quad \varphi(x, y, z, \alpha, \beta) = 0,$$

dont les équations renferment *deux* paramètres α et β, forment ce que l'on nomme une *congruence de courbes*.

Je dis qu'elles sont toutes tangentes à une même surface. Soient en effet $x(\alpha, \beta)$, $y(\alpha, \beta)$, $z(\alpha, \beta)$ les coordonnées inconnues d'un point de contact de la courbe (α, β) avec une surface fixe : celle-ci aura dès lors pour équations paramétriques

(2) $$x = x(\alpha, \beta), \quad y = y(\alpha, \beta), \quad z = z(\alpha, \beta).$$

Le point $x(\alpha, \beta)$, ... étant sur la courbe (α, β), on a d'abord

(3) $$f[x(\alpha, \beta), \ldots, \alpha, \beta] = 0, \quad \varphi[x(\alpha, \beta), \ldots, \alpha, \beta] = 0.$$

Il faut maintenant exprimer qu'en ce point la tangente à la courbe (α, β) est tangente à la surface (2) au même point.

Or, pour la tangente à la courbe (α, β) au point considéré, x, y, z, les paramètres directeurs dx, dy, dz (n° 340) sont donnés proportionnellement par les relations

(4) $$dx\, f'_x + dy\, f'_y + dz\, f'_z = 0, \quad dx\, \varphi'_x + dy\, \varphi'_y + dz\, \varphi'_z = 0.$$

D'un autre côté, pour une tangente *quelconque* à la surface (2), au point d'arguments α, β, les paramètres directeurs sont proportionnels (n° 340) aux quantités suivantes, le rapport $d\beta : d\alpha$ étant

arbitraire :

$$x'_\alpha\,d\alpha + x'_\beta\,d\beta, \qquad y'_\alpha\,d\alpha + y'_\beta\,d\beta, \qquad z'_\alpha\,d\alpha + z'_\beta\,d\beta.$$

On a donc, en substituant ces valeurs à dx, dy, dz dans (4),

$$\begin{aligned} &d\alpha(f'_x x'_\alpha + f'_y y'_\alpha + f'_z z'_\alpha) + d\beta(f'_x x'_\beta + f'_y y'_\beta + f'_z z'_\beta) = 0,\\ &d\alpha(\varphi'_x x'_\alpha + \ldots\ldots\ldots\ldots) + d\beta(\varphi'_x x'_\beta + \ldots\ldots\ldots\ldots) = 0, \end{aligned}$$

et, en éliminant le rapport $d\beta : d\alpha$,

$$(5) \qquad \frac{f'_x x'_\alpha + f'_y y'_\alpha + f'_z z'_\alpha}{\varphi'_x x'_\alpha + \ldots} = \frac{f'_x x'_\beta + f'_y y'_\beta + f'_z z'_\beta}{\varphi'_x x'_\beta + \ldots}.$$

C'est la condition qui exprime le contact de la courbe et de la surface au point $x(\alpha, \beta)$, $y(\alpha, \beta)$, $z(\alpha, \beta)$. D'ailleurs, en dérivant les relations (3) par rapport aux variables indépendantes α et β, on a :

$$(6) \qquad \left\{ \begin{aligned} &f'_x x'_\alpha + f'_y y'_\alpha + f'_z z'_\alpha + f'_\alpha = 0, \qquad \varphi'_x x'_\alpha + \ldots + \varphi'_\alpha = 0,\\ &f'_x x'_\beta + \ldots\ldots\ldots\ldots + f'_\beta = 0, \qquad \varphi'_x x'_\beta + \ldots + \varphi'_\beta = 0, \end{aligned} \right.$$

de sorte que la condition (5) peut s'écrire

$$(7) \qquad f'_\alpha \varphi'_\beta - f'_\beta \varphi'_\alpha = 0.$$

Cette équation peut remplacer (5), c'est-à-dire que le système formé par (3) et (5) équivaut au système (3) et (7) : en effet, (3) et (5) entraînent (7), comme on vient de le voir ; inversement. (3) et (7) entraînent (5), puisque (3) entraîne (6), qui, si l'on tient compte de (7), donne (5).

En d'autres termes, le point x, y, z où la courbe (α, β) touche la surface fixe est donné par les trois relations (3) et (7), à savoir

$$(8) \qquad f = 0, \qquad \varphi = 0, \qquad f'_\alpha \varphi'_\beta - f'_\beta \varphi'_\alpha = 0,$$

et l'équation de cette surface, en x, y, z, s'obtient en éliminant entre elles les paramètres α et β.

368. Points et plans focaux. — En général, chaque courbe de la congruence touche en plusieurs points la surface fixe, car les équations (8), résolues par rapport à x, y, z, donnent d'ordinaire plus d'un système de solutions.

Si, par exemple, les courbes sont les droites

$$(9)\qquad x = az + p, \qquad y = bz + q,$$

où a, b, p, q sont des fonctions données de α et β, l'équation $f'_\alpha \varphi'_\beta - f'_\beta \varphi'_\alpha = 0$ s'écrit

$$(10)\qquad \left(z\frac{\partial a}{\partial \alpha} + \frac{\partial p}{\partial \alpha}\right)\left(z\frac{\partial b}{\partial \beta} + \frac{\partial q}{\partial \beta}\right) = \left(z\frac{\partial a}{\partial \beta} + \frac{\partial p}{\partial \beta}\right)\left(z\frac{\partial b}{\partial \alpha} + \frac{\partial q}{\partial \alpha}\right).$$

Elle est du second degré en z, de sorte que chaque droite d'une congruence touche généralement en deux points une surface, que l'on appelle *surface focale*. Les deux points de contact de chaque droite se nomment les *points focaux* de la droite; les plans tangents en ces points à la surface focale sont les deux *plans focaux*.

Pour obtenir les points focaux et la surface focale, on résoudra l'équation (10) en z, ce qui donnera une expression de la forme

$$z = F(\alpha, \beta) \pm \sqrt{G(\alpha, \beta)},$$

et, en portant cette valeur dans (9),

$$x = a(F \pm \sqrt{G}) + p,$$
$$y = b(F \pm \sqrt{G}) + q.$$

On a ainsi les coordonnées x, y, z des deux points focaux sur la droite (α, β), et, par suite, la représentation paramétrique des coordonnées d'un point de la surface focale.

Les noms de *surface focale* et de *points focaux* s'appliquent aussi à la surface que touchent les courbes d'une congruence quelconque, et à ses points de contact avec une courbe particulière de la congruence.

369. Remarque. — Considérons, dans la congruence (1), les deux courbes (α, β) et $(\alpha + d\alpha, \beta + d\beta)$; les équations de la seconde s'écrivent, en négligeant les infiniment petits d'ordre supérieur au premier,

$$f + d\alpha f'_\alpha + d\beta f'_\beta = 0, \qquad \varphi + d\alpha \varphi'_\alpha + d\beta \varphi'_\beta = 0.$$

Pour qu'elle rencontre la courbe (α, β), c'est-à-dire la courbe $f = 0$, $\varphi = 0$, il faut que l'on ait, pour un même système de

valeurs de x, y, z,

$$(11)\quad f = 0, \qquad \varphi = 0, \qquad d\alpha f'_\alpha + d\beta f'_\beta = 0, \qquad d\alpha \varphi'_\alpha + d\beta \varphi'_\beta = 0.$$

Ces quatre équations, à trois inconnues x, y, z, n'ont en général aucune solution commune, c'est-à-dire qu'une courbe de la congruence et une courbe infiniment voisine, prise au hasard, ne se rencontrent pas. Mais si l'on considère le rapport $d\beta : d\alpha$ comme une quatrième inconnue, les quatre équations (11) auront des solutions communes, c'est-à-dire qu'une courbe (α, β) rencontre les courbes $(\alpha + d\alpha, \beta + d\beta)$, pour lesquelles $d\beta : d\alpha$ a certaines valeurs, dépendant de α et de β. Les points de rencontre vérifient les équations que l'on obtient en éliminant $d\beta : d\alpha$ entre les relations (11), c'est-à-dire

$$f = 0, \qquad \varphi = 0, \qquad f'_\alpha \varphi'_\beta - f'_\beta \varphi'_\alpha = 0;$$

ce sont donc les points focaux situés sur la courbe (α, β). Ainsi, la surface focale peut encore être définie comme le lieu des points limites communs à deux courbes infiniment voisines de la congruence.

Deux courbes infiniment voisines, (α, β) et $(\alpha + d\alpha, \beta + d\beta)$, ne se coupent généralement qu'en *un seul* des points focaux : car les équations (11) donnent pour les inconnues $d\beta : d\alpha$, x, y, z un certain nombre de systèmes de solutions

$$\left(\frac{d\beta}{d\alpha}\right)_i, \quad x_i, \quad y_i, \quad z_i,$$

et, pour deux systèmes différents, les valeurs de $\frac{d\beta}{d\alpha}$ ne sont généralement pas les mêmes : géométriquement, cela signifie qu'à une valeur $\left(\frac{d\beta}{d\alpha}\right)_i$ du rapport $d\beta : d\alpha$, c'est-à-dire à une des courbes infiniment voisines coupant la courbe (α, β), ne correspond qu'un système x_i, y_i, z_i, c'est-à-dire un seul point de rencontre.

Exemple. — Appliquons ces résultats à une congruence de droites. Soient A et B les deux points de contact de la droite (α, β) avec la surface focale; une droite voisine $(\alpha + d\alpha, \beta + d\beta)$ passe par A, aux infiniment petits près du second ordre en $d\alpha$ et $d\beta$, et touche la surface focale en un point B', voisin de B, et évi-

demment situé en dehors de la droite AB. Le plan des deux droites, c'est-à-dire le plan des trois points B, A, B', contient, à la limite, deux tangentes distinctes, BA et BB', de la surface focale au point B; c'est donc, à la limite, le plan tangent à cette surface en B, c'est-à-dire le plan focal en B. On voit ainsi que les deux plans focaux relatifs à la droite AB sont les plans qui passent par cette droite et par chacune des deux droites voisines de la congruence s'appuyant sur la première : on observera que le plan focal en un des points A et B est celui qui contient la droite voisine passant par l'autre.

370. Congruences de normales. — Les normales à une surface S forment une congruence, car l'équation de l'une d'elles dépend des deux paramètres qui déterminent, sur S, la position de son pied. Elles touchent donc, chacune en deux points, une même surface, qu'on appelle, par analogie, la *développée* de la surface S.

Réciproquement, une congruence quelconque de droites n'est pas une congruence de normales, c'est-à-dire qu'il n'existe pas de surface normale à toutes ces droites.

Considérons, en effet, les droites

$$x = az + p, \qquad y = bz + q, \tag{12}$$

où a, b, p, q sont des fonctions de deux paramètres α et β. S'il existe une surface S à laquelle elles sont normales, soient $x(\alpha, \beta)$, $y(\alpha, \beta)$, $z(\alpha, \beta)$ les coordonnées du point d'incidence de la droite (α, β); on a d'abord

$$x(\alpha, \beta) = a\, z(\alpha, \beta) + p, \qquad y(\alpha, \beta) = b\, z(\alpha, \beta) + q, \tag{13}$$

et la surface S est représentée paramétriquement par

$$x = x(\alpha, \beta), \qquad y = y(\alpha, \beta), \qquad z = z(\alpha, \beta).$$

Exprimons maintenant qu'au point de S de paramètres α, β, la normale est la droite (α, β) de la congruence, c'est-à-dire que la direction a, b, 1 est normale à *tout* déplacement dx, dy, dz sur la surface à partir du point α, β (nº 340). Comme on a

$$dx = x'_\alpha\, d\alpha + x'_\beta\, d\beta, \qquad \ldots,$$

la relation de perpendicularité est

$$a(x'_\alpha\, d\alpha + x'_\beta\, d\beta) + b(y'_\alpha\, d\alpha + y'_\beta\, d\beta) + z'_\alpha\, d\alpha + z'_\beta\, d\beta = 0,$$

et cela quel que soit $d\alpha : d\beta$. Donc les conditions cherchées d'orthogonalité sont

$$(14)\qquad a x'_\alpha + b y'_\alpha + z'_\alpha = 0, \qquad a x'_\beta + b y'_\beta + z'_\beta = 0,$$

et l'on a, pour déterminer les *trois* fonctions inconnues x, y, z, les *quatre* relations (13) et (14). Il est aisé de trouver la condition exprimant que celles-ci sont compatibles, car, en dérivant les équations (13) par rapport à α et β, on obtient

$$x'_\alpha = a z'_\alpha + a'_\alpha z + p'_\alpha, \qquad y'_\alpha = \ldots,$$
$$x'_\beta = a z'_\beta + a'_\beta z + p'_\beta, \qquad y'_\beta = \ldots,$$

d'où, en portant ces valeurs des x', y' dans (14), pour les éliminer,

$$z'_\alpha(a^2 + b^2 + 1) + z(a a'_\alpha + b b'_\alpha) + a p'_\alpha + b q'_\alpha = 0,$$
$$z'_\beta(a^2 + b^2 + 1) + z(a a'_\beta + b b'_\beta) + a p'_\beta + b q'_\beta = 0,$$

ce qu'on peut écrire

$$(15)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial\alpha}\left(z\sqrt{a^2+b^2+1}\right) + \dfrac{a p'_\alpha + b q'_\alpha}{\sqrt{a^2+b^2+1}} = 0, \\[2ex] \dfrac{\partial}{\partial\beta}\left(z\sqrt{a^2+b^2+1}\right) + \dfrac{a p'_\beta + b q'_\beta}{\sqrt{a^2+b^2+1}} = 0. \end{cases}$$

On a ainsi deux équations, donnant les dérivées partielles, par rapport à α et à β, de la fonction $z\sqrt{a^2+b^2+1}$; pour qu'elles soient compatibles, il faut et il suffit (n° 327) que les deux valeurs de $\dfrac{\partial^2}{\partial\alpha\,\partial\beta}\left(z\sqrt{a^2+b^2+1}\right)$ qu'on déduit de ces relations soient égales. Donc

$$(16)\qquad \frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{a p'_\alpha + b q'_\alpha}{\sqrt{a^2+b^2+1}}\right) = \frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{a p'_\beta + b q'_\beta}{\sqrt{a^2+b^2+1}}\right).$$

C'est la condition à laquelle doivent satisfaire les fonctions données, a, b, p, q, de α, β, pour que la congruence (12) soit une congruence de normales. Si elle est vérifiée, les équations (15) fournissent les deux dérivées partielles de $z\sqrt{a^2+b^2+1}$, et, par

suite, on aura (n° **327**)

$$(17)\quad -z\sqrt{a^2+b^2+1}=\int_{\alpha_0}^{\alpha}\frac{ap'_\alpha+bq'_\alpha}{\sqrt{a^2+b^2+1}}\,d\alpha+\int_{\beta_0}^{\beta}\left(\frac{ap'_\beta+bq'_\beta}{\sqrt{a^2+b^2+1}}\right)_0 d\beta,$$

en supposant α remplacé par α_0 dans la fonction qui figure sous le second signe de quadrature. Cette équation donne la fonction $z(\alpha, \beta)$. Les fonctions $x(\alpha, \beta)$ et $y(\alpha, \beta)$ seront ensuite fournies par (13), et l'on connaîtra ainsi la représentation paramétrique d'une surface S à laquelle les droites (12) sont normales. Cette surface dépendra d'*un* paramètre arbitraire (n° **327**, note) introduit par la formule (17); en faisant varier le paramètre, on obtient évidemment une famille de surfaces parallèles.

Remarque. — Je dis que la condition (16) exprime que les deux plans focaux relatifs à une droite quelconque de la congruence sont rectangulaires. Comme elle est, par sa nature même, indépendante du choix des variables indépendantes α et β, nous prendrons pour α et β les coordonnées du point où une droite quelconque de la congruence rencontre le plan des xy; on a alors

$$p=\alpha,\qquad q=\beta;$$

et la condition (16), tous calculs faits, se réduit à

$$(18)\qquad \frac{\partial a}{\partial\beta}(1+b^2)-\frac{\partial b}{\partial\alpha}(1+a^2)+ab\left(\frac{\partial a}{\partial\alpha}-\frac{\partial b}{\partial\beta}\right)=0.$$

Soit alors d la droite (α, β) de la congruence :

$$x=az+\alpha,\qquad y=bz+\beta;$$

pour que la droite d' infiniment voisine $(\alpha+d\alpha,\ \beta+d\beta)$:

$$x=(a+da)z+\alpha+d\alpha,\qquad y=(b+db)z+\beta+d\beta,$$

rencontre d, il faut et il suffit que l'on ait

$$da\,d\beta-db\,d\alpha=0,$$

c'est-à-dire

$$\left(\frac{\partial a}{\partial\alpha}d\alpha+\frac{\partial a}{\partial\beta}d\beta\right)d\beta-\left(\frac{\partial b}{\partial\alpha}d\alpha+\frac{\partial b}{\partial\beta}d\beta\right)d\alpha=0,$$

ou, en posant $d\beta : d\alpha = m$,

$$(19) \qquad m^2 \frac{\partial a}{\partial \beta} + m\left(\frac{\partial a}{\partial \alpha} - \frac{\partial b}{\partial \beta}\right) - \frac{\partial b}{\partial \alpha} = 0.$$

Un plan focal relatif à la droite d passe par d et par la droite d' (n° 369); c'est donc le plan mené par d et par le point $x = \alpha + d\alpha$, $y = \beta + d\beta$, $z = 0$, trace de d' sur le plan des xy; il a dès lors pour équation

$$d\beta(x - az - \alpha) - d\alpha(y - bz - \beta) = 0,$$

et, puisque $d\beta : d\alpha = m$, il est parallèle au plan

$$mx - y + (b - am)z = 0.$$

En remplaçant m dans cette équation par chacune des deux racines m_1 et m_2 de l'équation (19), on obtient (en direction) les deux plans focaux relatifs à d; pour qu'ils soient rectangulaires, il faut et il suffit que l'on ait

$$m_1 m_2 + 1 + (b - am_1)(b - am_2) = 0.$$

Or en substituant, dans cette relation, à la somme $m_1 + m_2$ et au produit $m_1 m_2$, leurs valeurs fournies par l'équation en m (19), on retombe sur la condition (18), ce qui établit la proposition. Donc :

Pour qu'une congruence de droites soit une congruence de normales, il faut et il suffit que les deux plans focaux relatifs à chaque droite soient rectangulaires.

CHAPITRE II.

COURBES PLANES.

---

371. Osculation. — Soit un système de courbes planes dont l'équation contient $n+1$ paramètres; on dira qu'une de ces courbes est *osculatrice* en un point *donné* P à une courbe plane C_1, si elle a, en ce point, avec C_1, un contact de l'ordre le plus élevé possible. Les conditions du contact d'ordre k en un point *donné* étant au nombre de $k+1$ (n° 346), on voit que la courbe osculatrice considérée aura en général, avec C_1, un contact d'ordre n.

On peut dire aussi (n° 355) que la courbe osculatrice a, avec C_1, $n+1$ points d'intersection confondus en P.

Par exemple, la droite osculatrice en un point ($n=1$) est la tangente; de même, puisqu'un cercle dépend de trois paramètres, il y a, en chaque point P d'une courbe, un cercle, dit *osculateur,* ayant avec la courbe un contact du second ordre en P, c'est-à-dire trois points d'intersection confondus en P; il y a une conique, dite *osculatrice,* ayant un contact du quatrième ordre, c'est-à-dire cinq points d'intersection confondus, etc.

372. Tangente. — Soit C_1 la courbe définie par

$$x = x(t), \qquad y = y(t), \tag{1}$$

la droite

$$aX + bY + c = 0$$

aura un contact du premier ordre avec C_1, au point d'argument t, si l'on a (n° 346),

$$\begin{aligned} F(t) &= ax(t) + by(t) + c = 0, \\ F'(t) &= ax'(t) + by'(t) \qquad = 0, \end{aligned}$$

équations d'où l'on déduit les valeurs proportionnelles de a, b, c.

L'équation de la tangente est ainsi :

$$0 = \begin{vmatrix} X & Y & 1 \\ x & y & 1 \\ x' & y' & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} X-x & Y-y & 0 \\ x & y & 1 \\ x' & y' & 0 \end{vmatrix},$$

c'est-à-dire

$$\frac{X-x}{x'} = \frac{Y-y}{y'},$$

comme on le savait *a priori*, car $\frac{y'}{x'} = \frac{dy}{dx}$ (*voir* aussi le n° 340).

373. Cercle osculateur. — Le cercle

$$(X-\alpha)^2 + (Y-\beta)^2 - R^2 = 0$$

aura un contact du second ordre avec la courbe (1), au point $x(t), y(t)$, d'argument t, si l'on a

$$(2) \qquad F(t) = [x(t)-\alpha]^2 + [y(t)-\beta]^2 - R^2 = 0,$$

$$(3) \qquad \frac{1}{2}F'(t) = (x-\alpha)x' + (y-\beta)y' = 0,$$

$$(4) \qquad \frac{1}{2}F''(t) = (x-\alpha)x'' + (y-\beta)y'' + x'^2 + y'^2 = 0.$$

Ces trois équations donnent le centre α, β et le rayon R du cercle osculateur. Les deux dernières font connaître $x-\alpha$ et $y-\beta$; d'où

$$(5) \qquad \alpha = x - \frac{y'(x'^2+y'^2)}{x'y''-y'x''}, \qquad \beta = y + \frac{x'(x'^2+y'^2)}{x'y''-y'x''}.$$

La première donne ensuite R^2, en tenant compte des valeurs précédentes de $x-\alpha$ et $y-\beta$:

$$(6) \qquad R^2 = \frac{(x'^2+y'^2)^3}{(x'y''-y'x'')^2}, \qquad \text{d'où} \qquad \pm R = \frac{(x'^2+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{x'y''-y'x''}.$$

Si la courbe est donnée sous la forme $y = f(x)$, on posera

$$x = t, \qquad y = f(t), \qquad \text{d'où} \qquad x' = 1, \qquad x'' = 0;$$

quant à y' et y'', ce seront les dérivées de y par rapport à x,

déduites de l'équation de la courbe donnée. On a alors

$$(7) \qquad \pm R = \frac{(1+y_x'^2)^{\frac{3}{2}}}{y_x''},$$

ce qui est bien l'expression du rayon du cercle osculateur obtenue d'une manière différente aux n°s 61 et 79.

Le contact du cercle osculateur et de la courbe étant d'ordre pair, le cercle traverse la courbe au point de contact (n° 347).

374. Développée. — La développée est le lieu des centres des cercles osculateurs aux divers points d'une courbe; son équation (relation entre α et β) s'obtient en éliminant t entre les deux équations (5), ou, ce qui revient au même, entre les équations (3) et (4).

Or, l'équation (3), si l'on y regarde α et β comme les coordonnées courantes,

$$(3) \qquad (x-\alpha)x' + (y-\beta)y' = 0$$

est celle de la normale à la courbe proposée au point $x(t), y(t)$; le premier membre de l'équation (4) est la dérivée, par rapport au paramètre t, du premier membre de (3); donc, en éliminant t entre ces deux équations, on obtient l'*enveloppe des normales* à la proposée. Ainsi, comme on l'a déjà vu géométriquement (n° 61) :

Le lieu des centres des cercles osculateurs coïncide avec l'enveloppe des normales.

375. Courbure. — Elle a été définie au n° 58, et l'on a vu (n°s 61 et 79) qu'elle était l'inverse du rayon du cercle osculateur; on a donc

$$k = \frac{x'y'' - y'x''}{(x'^2 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Les points pour lesquels $x'y'' - y'x''$ est nul sont dits *d'inflexion;* le rayon du cercle osculateur y est infini, c'est-à-dire que ce cercle se réduit à la tangente, qui a dès lors trois points d'intersection confondus avec la courbe et traverse celle-ci au point de contact.

376. Rayon de courbure en coordonnées polaires. — On a trouvé au n° 62, pour le rayon de courbure de la courbe $\rho = \rho(\omega)$,

$$R = \frac{(\rho^2 + \rho'^2)^{\frac{3}{2}}}{\rho^2 + 2\rho'^2 - \rho\rho''}.$$

377. Équation intrinsèque. — On peut définir une courbe plane par une relation

$$k = f(s)$$

entre la courbure k en un point P et l'arc s, compté à partir d'un point fixe jusqu'en P : ces deux quantités dépendant d'une même variable t sont, en effet, fonctions l'une de l'autre.

Ce mode de définition n'introduit aucun élément étranger à la courbe, comme le sont les axes de coordonnées; deux courbes égales, mais différemment placées, ont la même équation, dite *équation intrinsèque*.

Voici comment on peut trouver l'équation cartésienne d'une courbe définie par son équation intrinsèque,

$$k = f(s).$$

Soit θ l'angle de la tangente en P avec Ox; on a par définition (n° 58)

$$k = \frac{d\theta}{ds},$$

d'où

$$d\theta = f(s)\,ds,$$

et

$$\theta - \theta_0 = \int f(s)\,ds,$$

θ_0 étant la constante d'intégration; résolvant cette équation par rapport à s, on en tirera

$$(8) \qquad s = F(\theta - \theta_0), \qquad \frac{ds}{d\theta} = F'(\theta - \theta_0).$$

On a d'ailleurs, sur la courbe (n° 56),

$$(9) \qquad \begin{cases} dx = ds\cos\theta, \\ dy = ds\sin\theta, \end{cases}$$

et, par suite, d'après (8),

$$dx = F'(\theta - \theta_0)\cos\theta\, d\theta,$$
$$dy = F'(\theta - \theta_0)\sin\theta\, d\theta,$$

d'où

$$x - x_0 = \int F'(\theta - \theta_0)\cos\theta\, d\theta,$$

$$y - y_0 = \int F'(\theta - \theta_0)\sin\theta\, d\theta,$$

x_0 et y_0 étant des constantes arbitraires.

Les coordonnées x et y sont ainsi exprimées en fonction d'un paramètre θ, ce qui résout le problème.

On voit qu'il y a une triple infinité de courbes répondant à la question, puisqu'il y a, dans les expressions de x et y, trois paramètres arbitraires, θ_0, x_0 et y_0 : toutes ces courbes sont identiques entre elles, c'est-à-dire ne sont que des positions d'une même courbe qu'on déplacerait dans le plan d'une manière quelconque.

En effet, faisons, sous les signes $\int$, le changement de variable

$$\theta - \theta_0 = t,$$

on a

$$x = x_0 + \int F'(t)\cos(\theta_0 + t)\, dt$$
$$= x_0 + \cos\theta_0 \int F'(t)\cos t\, dt - \sin\theta_0 \int F'(t)\sin t\, dt,$$

$$y = y_0 + \int F'(t)\sin(\theta_0 + t)\, dt$$
$$= y_0 + \sin\theta_0 \int F'(t)\cos t\, dt + \cos\theta_0 \int F'(t)\sin t\, dt,$$

formules de la même forme que celles de la transformation des coordonnées en axes rectangulaires, et qui montrent que la courbe considérée n'est autre que la courbe

$$x = \int F'(t)\cos t\, dt,$$

$$y = \int F'(t)\sin t\, dt,$$

qu'on fait tourner de l'angle θ_0 autour de l'origine, et qu'on transporte ensuite parallèlement à elle-même, de x_0 dans le sens

de Ox, et de y_0 dans le sens de Oy. D'après cela, on pourra se dispenser, dans les calculs, d'introduire les constantes d'intégration θ_0, x_0 et y_0.

378. **Exemple.** — *Courbe dont la courbure est constante.* On a

$$k = \frac{d\theta}{ds} = \frac{1}{a},$$

d'où

$$ds = a\, d\theta,$$

ce qui donne immédiatement, d'après (9),

$$dx = a \cos\theta\, d\theta, \qquad dy = a \sin\theta\, d\theta.$$

Par suite,

$$x = \int a \cos\theta\, d\theta = \quad a \sin\theta,$$

$$y = \int a \sin\theta\, d\theta = -a \cos\theta.$$

La courbe cherchée a donc pour équation cartésienne

$$x^2 + y^2 = a^2.$$

C'est un cercle de rayon a. Le cercle est donc la seule courbe plane de courbure constante.

Applications.

379. Rappelons les formules (5) et (6) :

$$R = \pm \frac{(x'^2 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}{x'y'' - y'x''}.$$

$$\alpha = x - y' \frac{x'^2 + y'^2}{x'y'' - y'x''},$$

$$\beta = y + x' \frac{x'^2 + y'^2}{x'y'' - y'x''}.$$

380. **Parabole.**

$$y^2 = 2px.$$

Prenons y pour variable indépendante :

$$y = t, \qquad y' = 1, \qquad y'' = 0.$$

On aura

$$x = \frac{y^2}{2p}, \qquad x' = \frac{y}{p}, \qquad x'' = \frac{1}{p},$$

et il viendra, pour les éléments du *cercle osculateur*,

$$R = \frac{(y^2 + p^2)^{\frac{3}{2}}}{p^2},$$

$$\alpha = \frac{y^2}{2p} + \frac{y^2 + p^2}{p} = p + \frac{3}{2}\frac{y^2}{p},$$

$$\beta = y - y\frac{y^2 + p^2}{p^2} = -\frac{y^3}{p^2}.$$

La *développée* s'obtient en éliminant y entre les deux dernières équations :

$$(\alpha - p)^3 = \frac{27}{8} p \beta^2.$$

381. **Ellipse.** — L'ellipse étant définie paramétriquement par

$$x = a \cos t,$$
$$y = b \sin t,$$

on a

$$x' = -a \sin t, \qquad x'' = -a \cos t, \qquad x'y'' - y'x'' = ab,$$
$$y' = \quad b \cos t, \qquad y'' = -b \sin t,$$

d'où

$$R = \frac{(a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t)^{\frac{3}{2}}}{ab}.$$

Si N est la normale limitée à son pied, d'une part, et à Ox d'autre part, on voit aisément que

$$R = \frac{N^3}{\left(\frac{b^4}{a^2}\right)}.$$

Pour le centre de courbure, on a

$$\alpha = a \cos t - b \cos t \frac{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t}{ab} = \frac{c^2}{a}\cos^3 t,$$

$$\beta = b \sin t - a \sin t \frac{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t}{ab} = -\frac{c^2}{b}\sin^3 t,$$

d'où l'équation de la développée :

$$(a\alpha)^{\frac{2}{3}} + (b\beta)^{\frac{2}{3}} = c^{\frac{4}{3}}.$$

382. Cycloïde. — Les relations paramétriques de définition (n° 288)

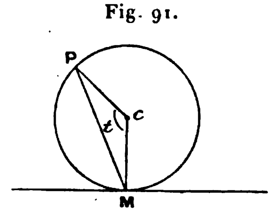
$$x = a(t - \sin t),$$
$$y = a(1 - \cos t)$$

donnent, par un calcul facile,

$$R = 2\sqrt{2}a(1 - \cos t)^{\frac{1}{2}} = 4a \sin\frac{t}{2}.$$

Le rayon de courbure en P est donc égal à 2MP (*fig.* 74 et 91) : on vérifie d'ailleurs aisément que la normale en P à la cycloïde

Fig. 91.

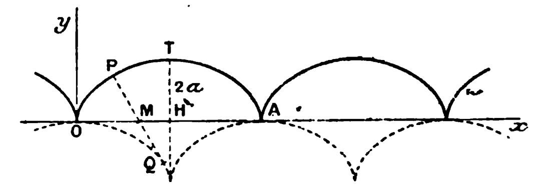


passe par M, c'est-à-dire est la droite PM; le centre de courbure est donc le symétrique de P par rapport au point M.

On trouve, pour le centre de courbure,

$$\alpha = \quad a(t + \sin t),$$
$$\beta = -a(1 - \cos t).$$

Fig. 92.



Si l'on pose $t = u + \pi$, on peut écrire

$$\alpha - a\pi = a(u - \sin u),$$
$$\beta + 2a = a(1 - \cos u),$$

c'est-à-dire que le lieu de α, β n'est autre chose que la cycloïde

primitive, déplacée de $a\pi$ dans le sens de Ox, et de $-2a$ dans le sens de Oy (*fig.* 92).

Les formules ci-dessus donnent aussi

$$\alpha + x = 2at, \qquad \beta + y = 0,$$

c'est-à-dire que le milieu du segment PQ, Q étant le centre de courbure (α, β), est le point $(at, 0)$, c'est-à-dire le point M, comme on l'a déjà observé.

383. Spirale logarithmique. — C'est, en coordonnées polaires, la courbe

$$\rho = ae^{m\omega}.$$

Le rayon de courbure au point d'angle polaire ω est (n° 376)

$$R = ae^{m\omega}\frac{(1+m^2)^{\frac{3}{2}}}{1+2m^2-m^2} = a\sqrt{1+m^2}\,e^{m\omega}.$$

Si l'on pose $m = \operatorname{tang}\alpha$, α est l'angle (constant) que fait le

Fig. 93.

rayon vecteur OM (*fig.* 93) avec la normale en M, car

$$\operatorname{tang}\alpha = \frac{\rho'}{\rho} = m;$$

on a donc $R = \frac{\rho}{\cos\alpha}$, et le centre de courbure N est à la rencontre de la normale MN et de la perpendiculaire élevée en O sur le rayon vecteur OM.

Le lieu de N, ou la développée, s'obtient aisément. Soient

ρ_1 et ω_1 les coordonnées polaires de N; on a

$$\omega_1 = \omega + \frac{\pi}{2},$$
$$\rho_1 = \text{ON} = \text{OM} \tang \alpha = mae^{m\omega}$$

La développée est donc

$$\rho_1 = mae^{m\left(\omega_1 - \frac{\pi}{2}\right)};$$

c'est une spirale logarithmique égale à la proposée.

CHAPITRE III.

COURBES GAUCHES.

---

384. Osculation. — Une surface, appartenant à une famille dont l'équation contient $n+1$ paramètres, pourra avoir en un point *donné,* avec une courbe gauche, un contact d'ordre n, puisque les conditions du contact d'ordre k, entre une courbe et une surface, sont au nombre de $k+1$ (n° 349). Elle sera dite *osculatrice* à la courbe au point considéré.

De même, si une courbe gauche appartient à une famille dépendant de $2(n+1)$ paramètres, elle pourra avoir, en un point *donné,* avec une courbe gauche donnée, un contact d'ordre n, puisque (n° 350) les conditions du contact d'ordre k entre deux courbes gauches sont au nombre de $2(k+1)$. On dira encore, en ce cas, qu'il y a osculation au point considéré.

Par exemple, un plan, dépendant de trois paramètres, pourra avoir, en un point *donné,* avec une courbe gauche, un contact du second ordre : ce sera le plan osculateur. Un cercle, dépendant de six paramètres, pourra aussi avoir, en un point *donné,* un contact du second ordre, et ce sera le cercle osculateur.

385. Tangente. — C'est la droite osculatrice en un point. Considérons la courbe

$$(1) \qquad x = x(t), \qquad y = y(t), \qquad z = z(t);$$

la droite

$$X = aZ + p, \qquad Y = bZ + q$$

aura avec elle, au point t, un contact du premier ordre, si l'on a (n° 350)

$$\begin{cases} x(t) = az(t) + p, & y(t) = bz(t) + q, \\ x' = az', & y' = bz', \end{cases}$$

d'où l'on tire les valeurs de a, b, p, q. La droite est alors

$$X = \frac{x'}{z'} Z + x - \frac{x'}{z'} z, \qquad Y = \ldots,$$

ce qui s'écrit

$$\frac{X-x}{x'} = \frac{Y-y}{y'} = \frac{Z-z}{z'}.$$

386. **Plan osculateur.** — Le plan

$$AX + BY + CZ + D = 0$$

aura, au point t, un contact du second ordre avec la courbe (1), si l'on a (n° 349)

$$(2) \qquad Ax(t) + By(t) + Cz(t) + D = 0,$$

$$(3) \qquad Ax' + By' + Cz' = 0,$$

$$(4) \qquad Ax'' + By'' + Cz'' = 0.$$

On a donc, pour l'équation du plan osculateur, en tirant D de (2),

$$A(X-x) + B(Y-y) + C(Z-z) = 0,$$

A, B, C étant déterminés proportionnellement par (3) et (4) : dans tout ce qui suit, nous poserons

$$(5) \qquad A = y'z'' - z'y'', \qquad B = z'x'' - x'z'', \qquad C = x'y'' - y'x''.$$

On peut écrire aussi l'équation du plan osculateur sous la forme

$$(6) \qquad \begin{vmatrix} X-x & Y-y & Z-z \\ x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \end{vmatrix} = 0.$$

Les équations de la tangente et celle du plan osculateur restent les mêmes, quels que soient les angles des axes de coordonnées.

Remarques. — Le plan osculateur en M est (n° 355) la limite du plan mené par M et par deux points quelconques, M′, M″, infiniment voisins de M sur la courbe. On peut dire aussi que c'est la limite du plan mené par la tangente en M et par un point de la courbe, infiniment voisin de M.

La tangente en M et la tangente en M′ se rencontrent, aux infiniment petits près du second ordre par rapport à MM′, en un point (n° 365) qui a pour limite le point M.

387. **Enveloppe des plans osculateurs.** — Les plans osculateurs

aux divers points d'une courbe gauche dépendent d'*un paramètre* t; leur enveloppe est donc une surface développable Δ.

Je dis que les caractéristiques de Δ sont les tangentes de la courbe gauche proposée et que l'arête de rebroussement de Δ est cette courbe elle-même : il suffit d'établir la seconde partie, car on sait que les caractéristiques sont des droites, tangentes à l'arête de rebroussement (n° 361).

Le plan osculateur étant

$$(7) \qquad f(t) = A(X-x) + B(Y-y) + C(Z-z) = 0,$$

l'arête de rebroussement s'obtient (n° 358) en éliminant t entre cette équation et les équations $f'_t = 0$, $f''_t = 0$. Or

$$(8) \qquad f'(t) = A'(X-x) + B'(Y-y) + C'(Z-z) = 0,$$

car $Ax' + By' + Cz'$ est nul d'après (3);

$$(9) \qquad f''(t) = A''(X-x) + B''(Y-y) + C''(Z-z) = 0,$$

car $A'x' + B'y' + C'z' = 0$: en effet, de l'identité (3),

$$Ax' + By' + Cz' = 0,$$

on déduit, en dérivant,

$$(Ax'' + By'' + Cz'') + (A'x' + B'y' + C'z') = 0,$$

et, la première parenthèse étant nulle d'après (4), la seconde l'est aussi.

Alors les trois équations (7), (8), (9), qui définissent un point X, Y, Z de l'arête, en fonction du paramètre t, sont linéaires et homogènes en $X-x$, $Y-y$, $Z-z$; on a donc

$$X = x, \qquad Y = y, \qquad Z = z,$$

ce qui prouve bien que l'arête de rebroussement coïncide avec la courbe proposée [1].

---

[1] Ce raisonnement suppose que le déterminant des trois équations (7), (8) et (9) n'est pas nul identiquement. Admettons, pour simplifier, que la variable indépendante soit x, de sorte que $t = x$. Le déterminant des équations (7), (8) et (9) est alors

$$\begin{vmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \\ A'' & B'' & C'' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y'z'' - z'y'' & -z'' & y'' \\ y'z''' - z'y''' & -z''' & y''' \\ y'z^{\text{IV}} - z'y^{\text{IV}} + y''z''' - z''y''' & -z^{\text{IV}} & y^{\text{IV}} \end{vmatrix},$$

puisque $x' = 1$, $x'' = x''' = 0$. S'il est nul identiquement, on a, en ajoutant à la

Donc enfin, comme on l'a établi géométriquement au n° 361, le lieu des tangentes d'une courbe gauche *quelconque* est une développable; celle-ci est l'enveloppe des plans osculateurs de la courbe.

Il en résulte également que les plans osculateurs en deux points infiniment voisins, M et M′, de la courbe, se coupent suivant une droite qui a pour limite la tangente en M, puisque celle-ci est la caractéristique.

Remarque. — Le cône qui a pour directrice une courbe gauche C et pour sommet un point quelconque P admet évidemment pour plans tangents d'inflexion les plans osculateurs à C issus de P. En transformant ce résultat par polaires réciproques (n° 361), et observant qu'à un plan tangent d'inflexion d'un cône répond un point de rebroussement sur la courbe plane corrélative du cône, on voit que :

La courbe commune à une développable et à un plan quelconque a un rebroussement en chaque point d'intersection du plan et de l'arête de rebroussement de la développable.

De là le nom de cette arête.

---

première colonne la seconde et la troisième, multipliées respectivement par y' et z',

$$0 = \begin{vmatrix} 0 & z'' & y'' \\ 0 & z''' & y''' \\ y''z''' - z''y''' & z^{\text{IV}} & y^{\text{IV}} \end{vmatrix} = (y''z''' - z''y''')^2.$$

Donc, quel que soit x,

$$\frac{y'''}{y''} = \frac{z'''}{z''},$$

et, en remontant aux primitives,

$$\log y'' = \log z'' + \log a, \qquad \text{c'est-à-dire} \qquad y'' = a z''.$$

Remontons encore deux fois aux primitives :

$$y' = a z' + b,$$
$$y = a z + b x + c,$$

d'où il résulte que la courbe est plane. En ce cas, tous les plans osculateurs se confondent avec le plan de la courbe, et il n'y a lieu de chercher ni leur enveloppe, ni l'arête de rebroussement de celle-ci.

La conclusion est que le théorème énoncé dans le texte ne s'applique qu'aux courbes *gauches,* et il n'a, d'ailleurs, de sens que pour les courbes gauches.

388. Cercle osculateur. — C'est celui qui a un contact du second ordre (n° 384) avec la courbe en un point donné t.

Un cercle de l'espace peut être défini par les équations

$$(X-\alpha)^2+(Y-\beta)^2+(Z-\gamma)^2-R^2=0,$$
$$m(X-\alpha)+n(Y-\beta)+p(Z-\gamma)=0;$$

α, β, γ est le centre du cercle, R son rayon : les six paramètres sont α, β, γ, R et les rapports $\frac{m}{p}$, $\frac{n}{p}$.

Il y aura contact du second ordre avec la courbe au point $x(t), y(t), z(t)$, d'argument t, si l'on a (n° 350)

$$(10)\quad \begin{cases} (x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+(z-\gamma)^2=R^2, \\ (x-\alpha)x'+(y-\beta)y'+(z-\gamma)z'=0, \\ (x-\alpha)x''+(y-\beta)y''+(z-\gamma)z''+x'^2+y'^2+z'^2=0. \end{cases}$$

$$(11)\quad \begin{cases} m(x-\alpha)+n(y-\beta)+p(z-\gamma)=0, \\ mx'+ny'+pz'=0, \\ mx''+ny''+pz''=0; \end{cases}$$

ce sont là six équations qui déterminent les six inconnues α, β, γ, R, $\frac{m}{p}$, $\frac{n}{p}$.

Les deux dernières équations (11) montrent que m, n, p sont proportionnels à A, B, C, et la première équation (11) s'écrit alors

$$(12)\qquad A(\alpha-x)+B(\beta-y)+C(\gamma-z)=0,$$

c'est-à-dire que le centre α, β, γ du cercle est dans le plan osculateur au point x, y, z. Il en résulte que le cercle lui-même est dans ce plan, car son plan contient évidemment la tangente à la courbe au point considéré, droite du plan osculateur.

L'équation (12) et les deux dernières équations (10) déterminent α, β, γ, ou, mieux, $x-\alpha$, $y-\beta$, $z-\gamma$; la première équation (10) donne ensuite R^2. On a ainsi

$$x-\alpha=-\frac{\begin{vmatrix} 0 & B & C \\ 0 & y' & z' \\ x'^2+y'^2+z'^2 & y'' & z'' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A & B & C \\ x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \end{vmatrix}}=\frac{(x'^2+y'^2+z'^2)(Cy'-Bz')}{A^2+B^2+C^2};$$

on obtient, par permutation tournante, $y - \beta$, $z - \gamma$. Enfin

$$R^2 = \frac{(x'^2+y'^2+z'^2)^2}{(A^2+B^2+C^2)^2}[(Cy'-Bz')^2+(Az'-Cx')^2+(Bx'-Ay')^2]$$
$$= \frac{(x'^2+y'^2+z'^2)^2}{(A^2+B^2+C^2)^2}[(A^2+B^2+C^2)(x'^2+y'^2+z'^2)-(Ax'+By'+Cz')^2],$$

c'est-à-dire, puisque, d'après (3), $Ax'+By'+Cz'$ est nul,

$$R = \frac{(x'^2+y'^2+z'^2)^{\frac{3}{2}}}{(A^2+B^2+C^2)^{\frac{1}{2}}}.$$

389. **Surface polaire.** — La seconde équation (10), où α, β, γ sont les coordonnées courantes, est celle du plan normal à la courbe au point t; la troisième équation (10) a pour premier membre la dérivée, par rapport à t, du premier membre de la précédente : ces deux équations représentent donc la droite caractéristique de l'enveloppe des plans normaux. Cette droite, dont les équations sont ainsi

$$(X-x)x'+(Y-y)y'+(Z-z)z' = 0,$$
$$(X-x)x''+(Y-y)y''+(Z-z)z'' = (x'^2+y'^2+z'^2),$$

est dite *axe du plan osculateur* ou *axe de courbure;* elle est perpendiculaire au plan osculateur, car ses paramètres directeurs sont $y'z''-z'y''$, ..., c'est-à-dire A, B, C. Ainsi :

Le centre du cercle osculateur (ou centre de courbure) est à l'intersection du plan osculateur et de l'axe de courbure.

L'axe de courbure se nomme aussi *droite polaire;* le lieu des axes de courbure, c'est-à-dire la développable enveloppe des plans normaux, se nomme la *surface polaire* de la courbe gauche proposée.

390. **Remarque.** — Deux courbes gauches qui ont entre elles un contact du second ordre en un point ont même cercle osculateur en ce point. Cela résulte immédiatement du corollaire du n° 351.

391. **Sphère osculatrice.** — C'est celle qui a un contact du troisième ordre avec la courbe en un point donné t.

La sphère

$$(X-\alpha)^2+(Y-\beta)^2+(Z-\gamma)^2-R^2=0$$

aura un contact du troisième ordre avec la courbe au point t, si l'on a (n° 349) :

$$(12)\qquad (x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+(z-\gamma)^2-R^2=0,$$

$$(13)\qquad (x-\alpha)x'+(y-\beta)y'+(z-\gamma)z'=0,$$

$$(14)\qquad (x-\alpha)x''+(y-\beta)y''+(z-\gamma)z''+x'^2+y'^2+z'^2=0,$$

$$(15)\qquad (x-\alpha)x'''+(y-\beta)y'''+(z-\gamma)z'''+3(x'x''+y'y''+z'z'')=0.$$

Les trois dernières équations donnent linéairement α, β, γ, coordonnées du centre de la sphère; la première donne ensuite le rayon R.

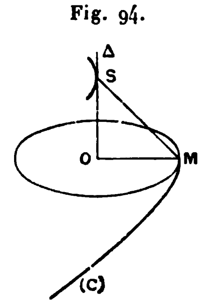
Nous n'expliciterons pas ces calculs; il est préférable d'interpréter géométriquement les relations précédentes.

L'équation (13), où α, β, γ sont les coordonnées courantes, est celle du plan normal à la courbe au point t; les équations (14) et (15) ont respectivement pour premiers membres les dérivées première et seconde, par rapport à t, du premier membre de (13); le point α, β, γ défini par ces trois équations est donc le point où le plan normal touche l'arête de rebroussement de son enveloppe (n° 358). En d'autres termes :

Le lieu des centres des sphères osculatrices coïncide avec l'arête de rebroussement de la surface polaire.

392. Remarque. — D'après cela, le centre de la sphère oscu-

Fig. 94.



latrice à la courbe (C) (*fig.* 94) au point M est le point S où la

caractéristique du plan normal, c'est-à-dire l'*axe de courbure* OΔ, touche l'arête de rebroussement de la surface polaire. Il en résulte que la sphère osculatrice contient le cercle osculateur; car son centre est sur la normale OΔ menée au plan du cercle par le centre O de celui-ci, et elle passe par le point M.

393. **Définitions.** — On nomme, en un point d'une courbe gauche : *Normale principale* la perpendiculaire menée à la tangente dans le plan osculateur;

Binormale la perpendiculaire au plan osculateur.

La normale principale contient évidemment le centre du cercle osculateur; la tangente, la normale et la binormale forment un trièdre trirectangle.

Nous désignerons respectivement par α_0, β_0, γ_0; α_1, β_1, γ_1; α_2, β_2, γ_2 les cosinus directeurs de ces trois dernières droites, sans nous préoccuper de fixer sur chacune d'elles un sens positif.

Les cosinus α_0, β_0, γ_0 de la tangente sont proportionnels à x', y', z'; nous écrirons donc

$$\alpha_0 = \frac{x'}{\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}}, \qquad \beta_0 = \frac{y'}{\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}}, \qquad \gamma_0 = \frac{z'}{\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}},$$

le radical étant pris avec le signe $+$.

De même, α_1, β_1, γ_1 vérifiant les relations

$$\alpha_1 x' + \beta_1 y' + \gamma_1 z' = 0,$$
$$\alpha_1 \mathrm{A} + \beta_1 \mathrm{B} + \gamma_1 \mathrm{C} = 0,$$

qui expriment que la normale principale est perpendiculaire à la tangente et parallèle au plan osculateur, on écrira, en répétant pour $\Sigma(\mathrm{C}y' - \mathrm{B}z')^2$ un calcul fait au n° 388,

$$\alpha_1 = \frac{\mathrm{B}z' - \mathrm{C}y'}{\sqrt{(\mathrm{A}^2+\mathrm{B}^2+\mathrm{C}^2)(x'^2+y'^2+z'^2)}}, \qquad \ldots,$$

et enfin, pour la binormale,

$$\alpha_2 = \frac{\mathrm{A}}{\sqrt{\mathrm{A}^2+\mathrm{B}^2+\mathrm{C}^2}}, \qquad \ldots.$$

Expression de divers infiniment petits.

394. Nous désignerons par :

p *un point* (x, y, z) *de la courbe gauche, d'argument* t;
P *le plan osculateur* } *en ce point;*
T *la tangente* }
p_1 *le point infiniment voisin de la courbe, correspondant à l'argument* $t + dt$, *et de coordonnées* $(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z)$;
P_1 *le plan osculateur* } *en ce point.*
T_1 *la tangente* }

La distance $pp_1 = \sqrt{\overline{\Delta x}^2 + \overline{\Delta y}^2 + \overline{\Delta z}^2}$ a pour valeur principale

$$\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2} = \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}\, dt = ds \quad \text{(élément d'arc).}$$

395. Angle de T et de T_1. — On sait que l'angle φ de deux directions (a, b, c) et (a_1, b_1, c_1) est donné par

$$\sin^2\varphi = \frac{(bc_1 - cb_1)^2 + (ca_1 - ac_1)^2 + (ab_1 - ba_1)^2}{(a^2 + b^2 + c^2)(a_1^2 + b_1^2 + c_1^2)}.$$

Or, pour la tangente T, a, b, c sont x', y', z'; pour la tangente T_1, a_1, b_1, c_1 sont $x' + \Delta x'$, $y' + \Delta y'$, $z' + \Delta z'$; on a ainsi :

$$\sin^2\varphi = \frac{(y'\Delta z' - z'\Delta y')^2 + (z'\Delta x' - x'\Delta z')^2 + (x'\Delta y' - y'\Delta x')^2}{(x'^2 + y'^2 + z'^2)[(x' + \Delta x')^2 + (y' + \Delta y')^2 + (z' + \Delta z')^2]}.$$

Les valeurs principales de $\Delta x'$, $\Delta y'$, $\Delta z'$ sont $x''dt$, $y''dt$, $z''dt$; la valeur principale de $\sin^2\varphi$, ou de φ^2, est donc

$$\text{Valeur principale } \varphi^2 = \frac{(y'z'' - z'y'')^2 + \ldots}{(x'^2 + y'^2 + z'^2)^2}\, dt^2 = \frac{A^2 + B^2 + C^2}{(x'^2 + y'^2 + z'^2)^2}\, dt^2,$$

et enfin

$$\text{Valeur principale } \varphi = \frac{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}{(x'^2 + y'^2 + z'^2)}\, dt.$$

396. Courbure. — C'est, par définition, la limite du rapport de l'angle φ, de deux tangentes infiniment voisines, à l'arc ds compris

entre leurs points de contact. On a donc, pour la courbure k,

$$k = \text{valeur principale } \frac{\varphi}{ds} = \frac{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}{(x'^2+y'^2+z'^2)^{\frac{3}{2}}},$$

c'est-à-dire $k = \frac{1}{R}$, R étant le rayon du cercle osculateur. Le cercle osculateur, son centre et son rayon se nomment, à cause de cela, *cercle, centre* et *rayon de courbure*.

397. Angle de P et de P_1. — Les coefficients des plans P et P_1 sont respectivement A, B, C et $A+\Delta A$, $B+\Delta B$, $C+\Delta C$; l'angle ψ de ces plans est donc donné par la formule

$$\sin^2\psi = \frac{(B\,\Delta C - C\,\Delta B)^2 + (C\,\Delta A - A\,\Delta C)^2 + (A\,\Delta B - B\,\Delta A)^2}{(A^2+B^2+C^2)[(A+\Delta A)^2+\ldots]}.$$

Or, les valeurs principales de ΔA, ΔB, ΔC sont

$$dA = A'\,dt = (y'z''' - z'y''')\,dt,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

et il en résulte aisément les formules

$$\text{Valeur principale de } B\,\Delta C - C\,\Delta B = Dx'\,dt,$$
$$\text{»} \quad \text{»} \quad C\,\Delta A - A\,\Delta C = Dy'\,dt,$$
$$\text{»} \quad \text{»} \quad A\,\Delta B - B\,\Delta A = Dz'\,dt,$$

D désignant le déterminant

$$D = \begin{vmatrix} x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \\ x''' & y''' & z''' \end{vmatrix}.$$

Il vient alors, pour valeur principale de $\sin^2\psi$ ou ψ^2,

$$\text{Valeur principale } \psi^2 = \frac{D^2(x'^2+y'^2+z'^2)}{(A^2+B^2+C^2)^2}\,dt^2,$$

d'où

$$\text{Valeur principale } \psi = \frac{D}{A^2+B^2+C^2}\,ds.$$

398. Torsion. — La limite du rapport $\frac{\psi}{ds}$ se nomme la *torsion* de la courbe gauche au point t; on la désigne par τ; on a, par la

formule précédente,

$$\tau = \frac{D}{A^2 + B^2 + C^2}.$$

Les points où la torsion est nulle se nomment *points stationnaires;* ils sont donnés par la relation $D = 0$.

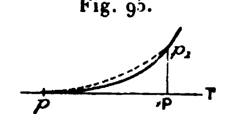
Remarque. — Pour une courbe plane, le plan osculateur coïncide toujours avec celui de la courbe; donc $\psi = 0$, et, par suite, la torsion est nulle.

Réciproquement, si la torsion est constamment nulle (ou si tous les points sont stationnaires), c'est-à-dire si $D = 0$, la courbe est plane. Car, en prenant x pour variable indépendante, c'est-à-dire en faisant $x' = 1$, $x'' = x''' = 0$, la condition $D = 0$ se réduit à $y''z''' - z''y''' = 0$, d'où l'on déduit, comme dans la note du n° 387, que la courbe est plane.

399. Distance δ de p_1 à T. — On trouve géométriquement, sans difficulté, sa valeur principale.

Soit pp_1 (trait plein) (*fig.* 95) la courbe proposée; figurons

Fig. 95.



(trait pointillé) le cercle qui la touche en p et qui passe par le point infiniment voisin p_1. Si R' est le rayon de ce cercle, on a rigoureusement, en menant p_1P normal à la tangente en p,

$$p_1 P = \frac{(\text{corde}\, pp_1)^2}{2R'}.$$

A la limite, le cercle considéré devient (n° 355) le cercle osculateur en p; R' devient R, rayon de courbure, et la valeur principale de corde pp_1 est arc pp_1, ou ds.

On a donc

$$\text{Valeur principale } \delta = \frac{ds^2}{2R} = \frac{1}{2} k\, ds^2.$$

C'est la même formule que pour une courbe plane (n° 64).

L'Analyse conduirait, par une voie plus longue, au même résultat.

400. Distance d de p_1 à P. — Elle est donnée par la formule

$$d = \frac{A\,\Delta x + B\,\Delta y + C\,\Delta z}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Remplaçons Δx, Δy, Δz par leurs développements tayloriens

$$\Delta x = x'\,dt + \frac{1}{2}x''\,dt^2 + \frac{1}{6}x'''\,dt^3 + \ldots.$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots;$$

nous voyons qu'au numérateur les termes en dt et dt^2 disparaissent, à cause des relations

$$Ax' + By' + Cz' = Ax'' + By'' + Cz'' = 0;$$

il reste donc, pour la valeur principale de d,

$$\text{Valeur principale } d = \frac{Ax''' + By''' + Cz'''}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}\,\frac{dt^3}{6}$$
$$= \frac{D}{6}\,\frac{dt^3}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = k\tau\,\frac{ds^3}{6}.$$

Elle est du troisième ordre en ds, comme cela devait être, puisque le contact de P et de la courbe est du second ordre.

Si le point p est stationnaire, τ est nul; la distance d est donc d'ordre quatre par rapport à ds, c'est-à-dire que le plan osculateur en p a un contact *d'ordre trois* avec la courbe.

Ainsi, les points stationnaires sont ceux où le plan osculateur a avec la courbe un contact du troisième ordre.

401. Différence entre un arc infiniment petit et sa corde. — Supposons que les coordonnées x, y, z d'un point d'une courbe soient exprimées en fonction de l'arc s, compté à partir d'un point fixe.

On a

$$s = t, \qquad ds = dt,$$

et la relation

$$ds = \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}\,dt$$

donne l'identité

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = 1,$$

d'où, par dérivation,

$$(1)\qquad \begin{cases} x'x'' + y'y'' + z'z'' = 0, \\ x'x''' + y'y''' + z'z''' + x''^2 + y''^2 + z''^2 = 0. \end{cases}$$

On a alors, pour la courbure,

$$k = \sqrt{A^2 + B^2 + C^2} = \sqrt{(y'z'' - z'y'')^2 + \ldots},$$
$$= \sqrt{(x'^2 + y'^2 + z'^2)(x''^2 + y''^2 + z''^2) - (x'x'' + y'y'' + z'z'')^2},$$

c'est-à-dire, en tenant compte de (1),

$$(2)\qquad k = \sqrt{x''^2 + y''^2 + z''^2}.$$

Cela posé, évaluons la différence entre l'arc Δs, ou ds (n° 20), et la corde qui joint les points x, y, z et $x + \Delta x$, $y + \Delta y$, $z + \Delta z$; c'est-à-dire la différence

$$ds - \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}.$$

Or, on a

$$\Delta x = x'\,ds + x''\frac{ds^2}{2} + x'''\frac{ds^3}{6} + \ldots,$$
$$\Delta y = y'\,ds + \ldots,$$
$$\Delta z = z'\,ds + \ldots,$$

d'où

$$\overline{\Delta x^2} + \overline{\Delta y^2} + \overline{\Delta z^2} = ds^2(x'^2 + y'^2 + z'^2) + ds^3(x'x'' + y'y'' + z'z'')$$
$$+ ds^4\left[\frac{1}{4}(x''^2 + y''^2 + z''^2) + \frac{1}{3}(x'x''' + y'y''' + z'z''')\right] + \ldots,$$

et, en tenant compte de (1) et (2),

$$\overline{\Delta x^2} + \overline{\Delta y^2} + \overline{\Delta z^2} = ds^2\left(1 - \frac{1}{12}k^2\,ds^2 + \ldots\right).$$

La différence à évaluer est donc

$$ds - ds\sqrt{1 - \frac{1}{12}k^2\,ds^2 + \ldots} = ds\left[1 - \left(1 - \frac{1}{12}k^2\,ds^2 + \ldots\right)^{\frac{1}{2}}\right],$$

ou, par la formule du binome,

$$ds\left(1 - 1 + \frac{1}{24}k^2\,ds^2 + \ldots\right).$$

La valeur principale de la différence entre l'arc et la corde est

ainsi

$$\frac{1}{24}k^2\,ds^3;$$

elle est du *troisième ordre* par rapport à l'arc.

402. Remarque. — Nous avons supposé jusqu'ici que x, y, z, sur la courbe gauche, sont exprimés en fonction d'un paramètre t; si la courbe est donnée sous la forme

$$f(x, y, z) = 0, \qquad g(x, y, z) = 0,$$

on supposera $t = x$; d'où $x' = 1$, $x'' = 0$. Quant à y', z', y'' et z'', ce seront les dérivées première et seconde de y et z par rapport à x; on les calculera en dérivant les équations de la courbe par rapport à x. Ainsi, l'on aura d'abord

$$f'_x + y' f'_y + z' f'_z = 0,$$
$$g'_x + y' g'_y + z' g'_z = 0,$$

d'où y' et z' linéairement; dérivons encore une fois :

$$f''_{x^2} + 2y' f''_{xy} + 2z' f''_{xz} + y'^2 f''_{y^2} + 2y'z' f''_{yz} + z'^2 f''_{z^2} + y'' f'_y + z'' f'_z = 0,$$
$$g''_{x^2} + 2y' g''_{xy} + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = 0,$$

d'où l'on tirera linéairement y'' et z'', puisque y' et z' sont déjà connus, etc.

Il suffira alors de porter ces valeurs de x', x'', $\ldots$, y', y'', $\ldots$, z', z'', $\ldots$ dans les formules générales, pour obtenir la tangente, le plan osculateur, la courbure, etc., de la courbe gauche proposée.

403. Formules de Frenet. — Cherchons les différentielles des cosinus directeurs α_0, β_0, γ_0 de la tangente en un point d'une courbe gauche (n° 393). On trouve aisément :

$$d\alpha_0 = d\frac{x'}{\sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}} = \frac{Bz' - Cy'}{(x'^2 + y'^2 + z'^2)^{\frac{3}{2}}}\,dt = k\alpha_1\,ds,$$

α_1, β_1, γ_1 étant les cosinus directeurs de la normale principale (n° 393). Ainsi

$$(3) \qquad d\alpha_0 = k\alpha_1\,ds, \qquad d\beta_0 = k\beta_1\,ds, \qquad d\gamma_0 = k\gamma_1\,ds.$$

De même, pour les cosinus directeurs α_2, β_2, γ_2 de la binormale, on trouve, par un calcul facile,

$$d\alpha_2 = d\frac{A}{(A^2+B^2+C^2)^{\frac{1}{2}}} = -\frac{Bz'-Cy'}{(A^2+B^2+C^2)^{\frac{3}{2}}}D\,dt = -\tau\alpha_1\,ds.$$

Ainsi :

$$(4) \qquad d\alpha_2 = -\tau\alpha_1\,ds, \qquad d\beta_2 = -\tau\beta_1\,ds, \qquad d\gamma_2 = -\tau\gamma_1\,ds.$$

Enfin, pour obtenir $d\alpha_1$, $d\beta_1$, $d\gamma_1$, différentions les relations

$$\begin{aligned} \alpha_1^2 + \beta_1^2 + \gamma_1^2 &= 1, \\ \alpha_1\alpha_0 + \beta_1\beta_0 + \gamma_1\gamma_0 &= 0, \\ \alpha_1\alpha_2 + \beta_1\beta_2 + \gamma_1\gamma_2 &= 0, \end{aligned}$$

dont les deux dernières expriment que la normale principale est perpendiculaire à la tangente et à la binormale; il vient, en utilisant (3) et (4),

$$\alpha_1 d\alpha_1 + \beta_1 d\beta_1 + \gamma_1 d\gamma_1 = 0, \qquad \alpha_0 d\alpha_1 + \beta_0 d\beta_1 + \gamma_0 d\gamma_1 + k\,ds = 0,$$
$$\alpha_2 d\alpha_1 + \beta_2 d\beta_1 + \gamma_2 d\gamma_1 - \tau\,ds = 0,$$

d'où l'on tire aisément

$$(5) \qquad \begin{cases} d\alpha_1 = (-k\alpha_0 + \tau\alpha_2)\,ds, \qquad d\beta_1 = (-k\beta_0 + \tau\beta_2)\,ds, \\ d\gamma_1 = (-k\gamma_0 + \tau\gamma_2)\,ds. \end{cases}$$

Les formules (3), (4) et (5) sont les formules de Frenet.

Lieu des centres de courbure. Développées.

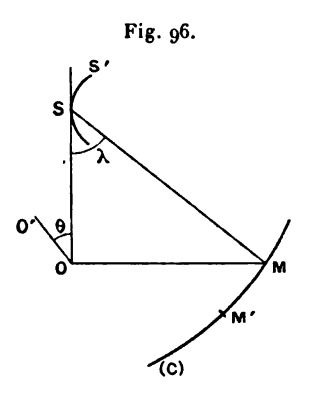
404. Lieu des centres des cercles osculateurs. — Soient O et S (*fig.* 96) les centres du cercle osculateur et de la sphère osculatrice en un point M d'une courbe gauche (C); OS est l'axe du plan osculateur. Le lieu de O, qui est une courbe, est donc tracé sur la surface lieu de OS, c'est-à-dire sur la surface polaire (D), enveloppe des plans normaux à (C).

Cherchons la *tangente au lieu de* O; désignons par O' et S' les points analogues à O et S qui répondent au point M' infiniment voisin de M sur (C); par θ et λ les angles O'OS et OSM : la

direction OO′ est dans le plan OSM, qui est le plan tangent à la développable (D) le long de OS.

Appliquons la formule de variation de longueur (n° 80) aux segments OS, OM, SM; il vient, en observant que OS touche

Fig. 96.



en S le lieu du point S, c'est-à-dire l'arête de rebroussement de (D) (n° 392), et que OM et SM sont normaux en M à la courbe (C), puisque OSM est le plan normal en M,

$$\begin{aligned} d\mathrm{OS} &= \mathrm{SS'} - \mathrm{OO'}\cos\theta, \\ d\mathrm{OM} &= \mathrm{OO'}\sin\theta, \\ d\mathrm{SM} &= \mathrm{SS'}\cos\lambda. \end{aligned}$$

D'ailleurs, en différentiant la relation

$$\overline{\mathrm{SM}}^2 = \overline{\mathrm{OS}}^2 + \overline{\mathrm{OM}}^2,$$

on a

$$\mathrm{SM}\, d\mathrm{SM} = \mathrm{OS}\, d\mathrm{OS} + \mathrm{OM}\, d\mathrm{OM},$$

c'est-à-dire

$$\mathrm{SM}.\mathrm{SS'}\cos\lambda = \mathrm{OS}.\mathrm{SS'} + \mathrm{OO'}[-\mathrm{OS}\cos\theta + \mathrm{OM}\sin\theta];$$

comme

$$\mathrm{OS} = \mathrm{SM}\cos\lambda,$$

il reste

$$\mathrm{OS}\cos\theta = \mathrm{OM}\sin\theta,$$

c'est-à-dire

$$\tan g\theta = \frac{\mathrm{OS}}{\mathrm{OM}},$$

ce qui est égal à $\cot\lambda$.

Donc $\theta = \frac{\pi}{2} - \lambda$, c'est-à-dire que la tangente OO' au lieu de O, située dans le plan OSM, est normale à la droite joignant le point O au milieu du segment SM, ce qu'on aurait pu établir plus directement sans grande difficulté.

Corollaire I. — Le lieu du point O *n'est pas une développée* comme dans le cas des courbes planes, c'est-à-dire que la tangente en O à ce lieu ne coïncide pas constamment avec la droite OM. Pour qu'il en fût constamment ainsi il faudrait que $\theta = \frac{\pi}{2}$, d'où $\lambda = 0$, c'est-à-dire que le point S fût à l'infini. La sphère osculatrice se réduirait donc constamment au plan osculateur; celui-ci aurait, dès lors, un contact du troisième ordre avec la courbe; tous les points de celle-ci seraient, par suite, stationnaires, et la courbe serait plane (n° 398).

Corollaire II. — Pour que les centres, O et S, du cercle osculateur et de la sphère osculatrice coïncident, il faut que λ soit égal à $\frac{\pi}{2}$, d'où $\theta = 0$, et la relation $d\mathrm{OM} = \mathrm{OO'}\sin\theta$ montre que $d\mathrm{OM}$ est nul, c'est-à-dire que le rayon de courbure est maximum ou minimum.

Inversement, si, en un point M, le rayon de courbure OM est maximum ou minimum, $\mathrm{OO'}\sin\theta$ est nul, d'où $\theta = 0$, $\lambda = \frac{\pi}{2}$, et les points S et O coïncident. Ainsi :

Les points d'une courbe gauche pour lesquels le centre du cercle osculateur coïncide avec le centre de la sphère osculatrice sont ceux qui correspondent au maxima et minima du rayon de courbure.

Corollaire III. — Pour que les deux centres O et S coïncident quel que soit le point M sur (C), il faut que $d\mathrm{OM}$ soit nul en tout point de C, c'est-à-dire $\mathrm{OM} = \text{const.}$, et réciproquement. Donc :

En tout point d'une courbe de courbure constante, les centres du cercle osculateur et de la sphère osculatrice coïncident; réciproquement, cette propriété n'appartient qu'aux courbes de courbure constante.

405. Rayon de la sphère osculatrice. — Imaginons menée la tangente en S′ à la courbe SS′ (*fig.* 96); elle passe par O′, puisqu'elle est l'axe de courbure en M′. De plus, elle rencontre, au second ordre près, la tangente en S en un point T, qui a pour limite le point S (n° 386), et son angle avec cette tangente est l'angle ψ des plans osculateurs à (C) en M et M′. On a trouvé plus haut $d\text{OM} = \text{OO}'\sin\theta$; or, le triangle OTO′ donne

$$\text{OO}'\sin\theta = \text{TO}'\sin\psi,$$

d'où, à la limite, en remplaçant TO′ par SO et $\sin\psi$ par ψ, ou $\tau\,ds$,

$$d\text{OM} = \text{OS}\,\tau\,ds, \qquad \text{c'est-à-dire} \qquad \text{OS} = \frac{1}{\tau}\frac{d\text{OM}}{ds}.$$

La relation $\overline{\text{SM}}^2 = \overline{\text{OS}}^2 + \overline{\text{OM}}^2$ donne alors, en posant $\text{SM} = \rho$ et $\text{OM} = \text{R}$ rayon de courbure de (C) en M,

$$\rho^2 = \text{R}^2 + \frac{1}{\tau^2}\left(\frac{d\text{R}}{ds}\right)^2,$$

expression remarquable du rayon ρ de la sphère osculatrice en M.

Les corollaires II et III ci-dessus se déduiraient immédiatement de cette formule.

406. Développées d'une courbe gauche. — On nomme *normale* à une courbe gauche (C), en un point M, toute droite passant par M et perpendiculaire à la tangente en ce point; *développée* de (C), toute courbe dont les tangentes sont normales à (C).

Soient P un point d'une développée, PM la tangente en P, normale en M à la courbe (C); désignons par MN la normale principale à (C) en M, par Q la projection de P sur MN.

Les cosinus directeurs de la droite MN sont α_1, β_1, γ_1; ceux de PQ sont évidemment les cosinus directeurs, α_2, β_2, γ_2, de l'axe de courbure en M. Posons $\text{MQ} = \rho$, et désignons par ω l'angle PMQ, de sorte que $\text{QP} = \rho\,\text{tang}\,\omega$. Si x, y, z sont les coordonnées de M exprimées en fonction d'un paramètre t, et ξ, η, ζ celles de P, on aura, en projetant sur les trois axes le contour MQP,

$$(6) \qquad \begin{cases} \xi = x + \rho\alpha_1 + \rho\alpha_2\,\text{tang}\,\omega, \\ \eta = y + \rho\beta_1 + \rho\beta_2\,\text{tang}\,\omega, \\ \zeta = z + \rho\gamma_1 + \rho\gamma_2\,\text{tang}\,\omega. \end{cases}$$

Pour que le lieu du point ξ, η, ζ soit une développée il faut que la tangente en P soit la droite PM, donc que $d\xi, d\eta, d\zeta$ soient proportionnels à $\xi - x, \eta - y, \zeta - z$. Ainsi, on aura

$$(7) \qquad \frac{d\xi}{\xi - x} = \frac{d\eta}{\eta - y} = \frac{d\zeta}{\zeta - z}.$$

Soit ε la valeur commune de ces rapports; la relation

$$d\xi = \varepsilon(\xi - x)$$

devient, si l'on y remplace ξ et $d\xi$ par leurs valeurs tirées de (6),

$$(8) \qquad \begin{cases} dx + \rho\, d\alpha_1 + \rho \operatorname{tang}\omega\, d\alpha_2 \\ \quad + \alpha_1 d\rho + \alpha_2 d(\rho \operatorname{tang}\omega) = \varepsilon(\rho\alpha_1 + \rho\alpha_2 \operatorname{tang}\omega). \end{cases}$$

Or $dx = x'dt$, et comme on a posé (n° 393)

$$\alpha_0 \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2} = x',$$

on voit que dx est égal à $\alpha_0 ds$; $d\alpha_1$ et $d\alpha_2$ sont donnés par les formules de Frenet (4) et (5), de sorte que la relation (8) s'écrit :

$$\alpha_0 ds(1 - k\rho) + \alpha_1(d\rho - \varepsilon\rho - \rho\tau \operatorname{tang}\omega\, ds) \\ + \alpha_2[d(\rho \operatorname{tang}\omega) - \varepsilon\rho \operatorname{tang}\omega + \rho\tau\, ds] = 0.$$

De même les deux équations $d\eta = \varepsilon(\eta - y)$, $d\zeta = \varepsilon(\zeta - z)$ conduisent à deux relations qui se déduisent de la précédente par le changement des α en β, puis en γ : on obtient donc trois équations, linéaires et homogènes par rapport aux quantités

$$ds(1 - k\rho), \quad d\rho - \varepsilon\rho - \rho\tau \operatorname{tang}\omega\, ds, \quad d(\rho \operatorname{tang}\omega) - \varepsilon\rho \operatorname{tang}\omega + \rho\tau\, ds,$$

et comme le déterminant du système est différent de zéro, puisque c'est celui des neuf cosinus, égal à 1, les trois quantités ci-dessus sont nulles. On a donc

$$k\rho = 1, \qquad d\rho - \rho\tau \operatorname{tang}\omega\, ds = \varepsilon\rho, \qquad d(\rho \operatorname{tang}\omega) + \rho\tau\, ds = \varepsilon\rho \operatorname{tang}\omega;$$

d'où, en éliminant ε et observant que $\frac{1}{k} = R$ rayon de courbure de (C) en M,

$$(9) \qquad \rho = R, \qquad d\omega = -\tau\, ds.$$

La relation $\rho = R$ montre que le point Q, qui a pour coordonnées $x + \rho\alpha_1, \ldots$, c'est-à-dire, en remplaçant R et α_1 par leurs

valeurs,

$$x + \frac{x'^2 + y'^2 + z'^2}{A^2 + B^2 + C^2}(Bz' - Cy'), \ \ldots,$$

coïncide avec le centre du cercle osculateur à (C) au point M (n° 388); le point P est donc sur l'axe de courbure en M, c'est-à-dire sur la surface polaire de (C). Donc :

Les développées d'une courbe sont sur la surface polaire de celle-ci.

La seconde relation (9), $d\omega = -\tau\, ds$, donne

$$(10) \qquad \omega = -\int^t \tau\, ds + \omega_0 = -\int^t \frac{D\sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}}{A^2 + B^2 + C^2}\, dt + \omega_0,$$

ω_0 désignant une constante arbitraire et t l'argument de M sur la courbe (C).

Il suffit, maintenant, de porter dans (6) cette valeur de ω, ainsi que les valeurs connues (n° 393) de α_1, α_2, β_1, β_2, γ_1, γ_2, et d'y remplacer ρ par R, ou $(x'^2 + y'^2 + z'^2)^{\frac{3}{2}} : (A^2 + B^2 + C^2)^{\frac{1}{2}}$, pour obtenir les coordonnées ξ, η, ζ d'un point d'une développée en fonction du paramètre t : ces formules renfermant la constante arbitraire ω_0, il y a une infinité simple de développées.

Remarques. — 1° Deux valeurs (10) de ω, répondant à deux valeurs différentes de ω_0, ont une différence constante tout le long de (C); donc :

Les deux normales en un point variable d'une courbe, qui touchent deux développées fixes de celle-ci, se coupent sous un angle constant.

2° Pour une courbe plane, τ est nul et ω, donné par (10), se réduit à ω_0. Soit $z = 0$ le plan de la courbe; désignons par ξ_0 et η_0 les coordonnées du centre de courbure Q au point M $(x, y, 0)$, par R le rayon de courbure de la proposée en M; les formules (6) deviennent, puisque $\alpha_2 = \beta_2 = \gamma_1 = 0$, et $\gamma_2 = 1$,

$$\xi = \xi_0, \qquad \eta = \eta_0, \qquad \zeta = a\mathrm{R},$$

a étant une constante arbitraire. On obtient donc les développées en prenant, sur chaque normale au plan de la courbe issue d'un

centre de courbure, une longueur proportionnelle au rayon de courbure correspondant.

La développée ordinaire correspond à $a = 0$; les autres développées sont sur le cylindre droit qui contient celle-là, et qui est, d'ailleurs, la surface polaire de la courbe plane proposée.

407. Exemples. — Appliquons les formules générales à quelques courbes.

1° *Hélice.* — On nomme *hélice* la courbe tracée sur un cylindre quelconque, et décrite par un point M qui se meut de manière que sa distance Mm, à une section droite, soit proportionnelle à l'arc de section droite Am, comptée à partir d'une origine quelconque A.

Prenons pour plan des xy celui de la section droite; soient

Fig. 97.

x, y, z les coordonnées de M (*fig.* 97), et σ l'arc AM. On a, par hypothèse,

$$z = a\sigma.$$

D'ailleurs x et y, coordonnées du point m de la section droite, sont des fonctions connues de l'arc σ, en sorte qu'on a, pour définir l'hélice,

$$x = \varphi(\sigma), \qquad y = \psi(\sigma), \qquad z = a\sigma.$$

Observons, de plus, que, σ étant l'arc de la courbe plane $x = \varphi(\sigma)$, $y = \psi(\sigma)$, on a

$$d\sigma^2 = [\varphi'^2(\sigma) + \psi'^2(\sigma)]\, d\sigma^2,$$

c'est-à-dire

$$\varphi'^2(\sigma)+\psi'^2(\sigma)=1,$$

ce qu'on peut écrire

$$x'^2+y'^2=1.$$

Tangente. — Ses paramètres directeurs sont x', y', a; étant toujours posé

$$x'=\varphi'(\sigma), \qquad y'=\psi'(\sigma);$$

son angle θ avec Oz est défini par

$$\cos\theta=\frac{a}{\sqrt{x'^2+y'^2+a^2}}=\frac{a}{\sqrt{1+a^2}};$$

il est donc constant, c'est-à-dire que l'hélice coupe les génératrices du cylindre sous un angle constant.

Inversement, une courbe tracée sur un cylindre et qui coupe les génératrices sous un angle constant est une hélice. En effet, toute courbe tracée sur le cylindre peut être définie par

$$x=\varphi(\sigma), \qquad y=\psi(\sigma), \qquad z=\chi(\sigma),$$

σ étant toujours l'arc de section droite entre le point A et le point m, projection du point x, y, z; si elle coupe les génératrices sous un angle constant θ_0, on a

$$\cos\theta_0=\frac{\chi'(\sigma)}{\sqrt{\varphi'^2(\sigma)+\psi'^2(\sigma)+\chi'^2(\sigma)}},$$

d'où, puisque $\varphi'^2+\psi'^2=1$,

$$\chi'(\sigma)=\frac{\cos\theta_0}{\sin\theta_0} \qquad \text{et} \qquad \chi(\sigma)=\frac{\cos\theta_0}{\sin\theta_0}(\sigma+h),$$

h étant une constante arbitraire. La courbe est donc une hélice pour laquelle $a=\frac{\cos\theta_0}{\sin\theta_0}$, l'arc de section droite étant compté à partir d'un point fixe B, tel que $\text{arc}\,AB=h$.

Plan osculateur. — Calculons ses coefficients A, B, C :

$$\begin{aligned}
A &= y'z''-z'y''=-ay'',\\
B &= z'x''-x'z''=ax'',\\
C &= x'y''-y'x'',
\end{aligned}$$

x'' et y'' désignant $\varphi''(\sigma)$ et $\psi''(\sigma)$. Le plan osculateur est donc

$$-ay''(X-x)+ax''(Y-y)+(x'y''-y'x'')(Z-z)=0.$$

Il est normal au cylindre au point M; car la normale en M au cylindre, parallèle à la normale en m à la section droite, a pour paramètres directeurs y', $-x'$, o; la condition du parallélisme de cette droite et du plan osculateur est

$$-ay''y'-ax''x'=0, \qquad \text{ou} \qquad x'x''+y'y''=0,$$

ce qui est vérifié, puisque

$$x'^2+y'^2=1, \qquad \text{d'où} \qquad x'x''+y'y''=0.$$

Courbure. — On a

$$k=\frac{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}{(x'^2+y'^2+z'^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Or

$$C=(x'y''-y'x'')=\sqrt{(x'^2+y'^2)(x''^2+y''^2)-(x'x''+y'y'')^2}=\sqrt{x''^2+y''^2},$$

et, par suite,

$$A^2+B^2+C^2=(x''^2+y''^2)(1+a^2).$$

Donc

$$k=\sqrt{x''^2+y''^2}\,\frac{\sqrt{1+a^2}}{(1+a^2)^{\frac{3}{2}}}=\frac{\sqrt{x''^2+y''^2}}{1+a^2}.$$

D'ailleurs, la courbure k_1 de la section droite en m s'obtient en faisant dans cette formule $a=0$; donc

$$k=\frac{k_1}{1+a^2},$$

d'où un théorème facile à énoncer.

Torsion. — On a

$$\tau=\frac{\begin{vmatrix} x' & y' & a \\ x'' & y'' & 0 \\ x''' & y''' & 0 \end{vmatrix}}{A^2+B^2+C^2}=\frac{a}{1+a^2}\,\frac{x''y'''-x'''y''}{x''^2+y''^2}.$$

Or

$$\frac{x''y'''-x'''y''}{x''^2+y''^2}=\left(\text{arc tang}\,\frac{y''}{x''}\right)';$$

et, en vertu de l'identité $x'x'' + y'y'' = 0$,

$$\frac{y''}{x''} = -\frac{x'}{y'},$$

de sorte que

$$\tau = -\frac{a}{1+a^2}\left(\operatorname{arc\,tang}\frac{x'}{y'}\right)' = \frac{a}{1+a^2}\,\frac{x'y''-y'x''}{x'^2+y'^2}$$

$$= \frac{a}{1+a^2}\,C = \frac{a}{1+a^2}\sqrt{x''^2+y''^2},$$

c'est-à-dire

$$\tau = ak.$$

La courbure et la torsion en un même point sont donc dans un rapport constant.

Arc. — La différentielle ds de l'arc d'hélice est donnée par la formule

$$ds = \sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}\,d\sigma = d\sigma\sqrt{1+a^2},$$

d'où

$$s = \sigma\sqrt{1+a^2}.$$

L'arc compris entre deux points de l'hélice est donc proportionnel à sa projection sur la section droite; ce fait était évident, *a priori*, en raison de la propriété de la tangente.

2° *Hélice circulaire.* — C'est une hélice quelconque tracée sur un cylindre de révolution. La section droite est un cercle de

Fig. 98.

rayon R, et l'on a, en supposant que le point A (*fig.* 98) soit sur Ox,

$$x = R\cos\left(\frac{\sigma}{R}\right), \qquad y = R\sin\left(\frac{\sigma}{R}\right), \qquad z = a\sigma,$$

car

$$\text{Angle } \omega = \frac{\sigma}{R}.$$

Pour l'hélice circulaire, la courbure et la torsion sont constantes, car k_1, courbure de la section droite, est la constante $\frac{1}{R}$. On peut écrire aussi, pour définir l'hélice,

$$x = R\cos\omega, \qquad y = R\sin\omega, \qquad z = m\omega,$$

ω étant le paramètre variable, au lieu de σ.

CHAPITRE IV.

LONGUEURS ET AIRES SUR LES SURFACES.

---

408. Plan tangent. — Soit une surface représentée paramétriquement par les équations

$$(1)\qquad x = x(u, v),\qquad y = y(u, v),\qquad z = z(u, v);$$

le plan tangent au point (u, v) est celui qui a un contact du premier ordre avec la surface en ce point.

Si le plan est

$$AX + BY + CZ + D = 0,$$

les conditions du contact du premier ordre sont (n° 352)

$$(2)\qquad \begin{cases} Ax(u, v) + By(u, v) + Cz(u, v) + D = 0, \\ A\dfrac{\partial x}{\partial u} + B\dfrac{\partial y}{\partial u} + C\dfrac{\partial z}{\partial u} = 0, \\ A\dfrac{\partial x}{\partial v} + B\dfrac{\partial y}{\partial v} + C\dfrac{\partial z}{\partial v} = 0, \end{cases}$$

d'où l'on déduit les valeurs proportionnelles de A, B, C, D; l'équation du plan tangent est alors, en éliminant d'abord D, puis A, B, C,

$$\begin{vmatrix} X - x & Y - y & Z - z \\ \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial z}{\partial u} \\ \dfrac{\partial x}{\partial v} & \dfrac{\partial y}{\partial v} & \dfrac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix} = 0.$$

Elle est la même, que les axes de coordonnées soient ou non rectangulaires. Nous l'écrirons

$$A(X - x) + B(Y - y) + C(Z - z) = 0,$$

en posant

$$A = \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v} - \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v},\qquad B = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v},\qquad C = \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}.$$

Si la surface est donnée sous la forme $z = f(x, y)$, on sup-

posera $u = x$, $v = y$; d'où

$$A = -\frac{\partial z}{\partial x} = -p, \qquad B = -q, \qquad C = +1.$$

409. Distance d'un point d'une surface au plan tangent en un point infiniment voisin. — Soient u, v et $u + du$, $v + dv$ les arguments sur une surface de deux points voisins, de coordonnées x, y, z et $x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z$; la distance du second point au plan tangent en (u, v) est

$$(3) \qquad \delta = \frac{A\,\Delta x + B\,\Delta y + C\,\Delta z}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Or on a (n° 169)

$$\Delta x = \frac{\partial x}{\partial u} du + \frac{\partial x}{\partial v} dv + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 x}{\partial u^2} du^2 + 2\frac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial v} du\,dv + \frac{\partial^2 x}{\partial v^2} dv^2\right) + \ldots,$$

$$\Delta y = \ldots,$$

$$\Delta z = \ldots.$$

Portons ces valeurs dans l'expression de δ : au numérateur les termes en du et dv disparaissent, car leurs coefficients

$$A\frac{\partial x}{\partial u} + B\frac{\partial y}{\partial u} + C\frac{\partial z}{\partial u} \quad \text{et} \quad A\frac{\partial x}{\partial v} + \ldots$$

sont nuls [équations (2)]; il reste alors pour la valeur principale de δ :

$$\frac{1}{2}\,\frac{\left(A\frac{\partial^2 x}{\partial u^2} + B\frac{\partial^2 y}{\partial u^2} + C\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}\right) du^2 + 2\left(A\frac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial v} + \ldots\right) du\,dv + \left(A\frac{\partial^2 x}{\partial v^2} + \ldots\right) dv^2}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

On voit que δ est du second ordre, ce qu'on savait *a priori*, puisque le plan tangent a un contact du premier ordre avec la surface.

Nous poserons, pour abréger,

$$\left(A\frac{\partial^2 x}{\partial u^2} + B\frac{\partial^2 y}{\partial u^2} + C\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}\right)\frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = R,$$

$$\left(A\frac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial v} + B\frac{\partial^2 y}{\partial u\,\partial v} + C\frac{\partial^2 z}{\partial u\,\partial v}\right)\frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = S,$$

$$\left(A\frac{\partial^2 x}{\partial v^2} + B\frac{\partial^2 y}{\partial v^2} + C\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\right)\frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = T,$$

d'où, en nous bornant à la valeur principale,

$$2\delta = \mathrm{R}\,du^2 + 2\mathrm{S}\,du\,dv + \mathrm{T}\,dv^2.$$

Dans certaines questions, on n'aura besoin que des *valeurs proportionnelles* de R, S, T :

$$\frac{\mathrm{A}\frac{\partial^2 x}{\partial u^2} + \mathrm{B}\frac{\partial^2 y}{\partial u^2} + \mathrm{C}\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}}{\mathrm{R}} = \frac{\mathrm{A}\frac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial v} + \ldots}{\mathrm{S}} = \frac{\mathrm{A}\frac{\partial^2 x}{\partial v^2} + \ldots}{\mathrm{T}}.$$

410. Il est à observer que si les axes de coordonnées sont obliques, δ est donnée par une formule analogue à (3), *où le numérateur reste le même,* le dénominateur seul ayant varié et demeurant indépendant de Δx, Δy, Δz : il en résulte immédiatement que la valeur principale de 2δ est toujours de la forme

$$\mathrm{R}\,du^2 + 2\mathrm{S}\,du\,dv + \mathrm{T}\,dv^2,$$

R, S, T n'ayant plus tout à fait, à cause du dénominateur, la même expression que ci-dessus, mais leurs valeurs proportionnelles étant toujours

$$\mathrm{A}\frac{\partial^2 x}{\partial u^2} + \ldots, \qquad \mathrm{A}\frac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial v} + \ldots, \qquad \mathrm{A}\frac{\partial^2 x}{\partial v^2} + \ldots.$$

Élément d'arc sur une surface.

411. Une courbe tracée sur la surface (1) est définie par une relation entre u et v, $v = \varphi(u)$. La direction de sa tangente au point u, v est déterminée par la valeur du rapport $\frac{dv}{du}$, ou $\varphi'(u)$, déduite de l'équation de la courbe. En effet, en différentiant les relations (1) on a

$$(4) \qquad dx = \frac{\partial x}{\partial u}du + \frac{\partial x}{\partial v}dv, \qquad dy = \ldots, \qquad dz = \ldots;$$

ce qui donne les valeurs proportionnelles de dx, dy, dz, c'est-à-dire les paramètres directeurs de la tangente, en fonction de $\frac{dv}{du}$.

On peut donc dire qu'en un point (u, v) une direction tangente à la surface est définie par le rapport $\frac{dv}{du}$, et réciproquement : cette

direction est la limite de celle de la droite qui joint le point u, v au point $u+du$, $v+dv$.

En un même point deux directions correspondant à deux valeurs différentes de $\frac{dv}{du}$ sont différentes, et ne peuvent coïncider que si ces valeurs coïncident : cela résulte de ce que, par les équations (4), les rapports $\frac{dy}{dx}$ et $\frac{dz}{dx}$ sont des quotients de fonctions linéaires en $\frac{dv}{du}$.

412. Le carré de la distance de deux points infiniment voisins sur la surface, et d'arguments u, v et $u+du$, $v+dv$, est, en valeur principale,

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = \left(\frac{\partial x}{\partial u}du + \frac{\partial x}{\partial v}dv\right)^2 + \ldots,$$

c'est-à-dire

$$(5) \qquad ds^2 = \text{E}\,du^2 + 2\text{F}\,du\,dv + \text{G}\,dv^2,$$

étant posé

$$\text{E} = \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2,$$

$$\text{F} = \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v},$$

$$\text{G} = \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2.$$

Cette valeur de ds^2 est aussi la valeur principale du carré d'un arc de courbe infiniment petit quelconque, tracé sur la surface et allant du point u, v au point $u+du$, $v+dv$.

413. Longueur d'un arc tracé sur la surface. — Soit, sur la surface, la courbe

$$v = \varphi(u);$$

la différentielle ds de son arc sera

$$ds = \sqrt{\text{E}\,du^2 + 2\text{F}\,du\,dv + \text{G}\,dv^2},$$

où l'on remplace v par $\varphi(u)$, et dv par $\varphi'(u)\,du$. Il vient ainsi une

expression de la forme

$$ds = F(u)\,du,$$

d'où, pour l'arc s, l'expression

$$s = \int_{u_0}^{u} F(u)\,du,$$

u_0 et u étant les valeurs du paramètre u qui répondent aux deux extrémités de l'arc.

414. Si la surface est donnée sous la forme

$$z = f(x, y),$$

on n'aura qu'à supposer $u = x$, $v = y$; alors

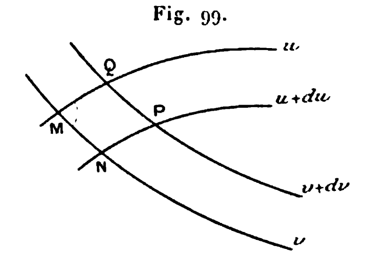
$$E = 1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2, \qquad F = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y}, \qquad G = 1 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2,$$

et pour ds^2, en remplaçant $\frac{\partial z}{\partial x}$ et $\frac{\partial z}{\partial y}$ par p et q,

$$ds^2 = (1 + p^2)\,dx^2 + 2pq\,dx\,dy + (1 + q^2)\,dy^2.$$

415. Remarques. — Les courbes tracées sur la surface (1), et qui

Fig. 99.



sont définies par $u =$ const. ou $v =$ const., sont dites *lignes coordonnées*, par analogie avec les courbes $x =$ const. et $y =$ const. du plan. On désignera par *courbe* u_0 la courbe $u = u_0$; on dira également *courbe* u pour la courbe le long de laquelle le premier paramètre a la valeur constante u.

Ceci posé, considérons sur la surface les courbes u et v, qui se croisent en M (*fig.* 99); puis les courbes $u + du$ et $v + dv$, qui se croisent en P.

On a, d'après (5),

$$\text{Valeur principale de } \overline{MN}^2 = E(u, v)\,du^2,$$

puisque dv est nul le long de la ligne MN.

De même

$$\text{Valeur principale de } \overline{QP}^2 = E(u, v+dv)\,du^2 = [E(u, v) + E'_v\,dv + \ldots]\,du^2,$$

d'où

$$\text{Valeur principale de QP} = \sqrt{E(u, v)}\,du\left(1 + \frac{E'_v}{E}\,dv + \ldots\right)^{\frac{1}{2}}$$
$$= \sqrt{E(u, v)}\,du\left(1 + \frac{1}{2}\frac{E'_v}{E}\,dv + \ldots\right),$$

ce qui montre que l'on a

$$\text{Valeur principale de QP} = \text{valeur principale de MN} = \sqrt{E}\,du.$$

De même, la valeur principale de MQ est celle de NP, c'est-à-dire que la figure MNPQ peut être considérée comme un *parallélogramme* en négligeant les infiniment petits du second ordre en du, dv.

L'angle NMQ des deux courbes u et v, au point M, s'évalue aisément; les paramètres directeurs de la tangente en M à la courbe u sont, d'après (4), proportionnels à

$$\frac{\partial x}{\partial v}\,dv, \quad \frac{\partial y}{\partial v}\,dv, \quad \frac{\partial z}{\partial v}\,dv,$$

c'est-à-dire à $\frac{\partial x}{\partial v}$, $\frac{\partial y}{\partial v}$, $\frac{\partial z}{\partial v}$, puisque $du = 0$ sur la courbe u; pour la courbe v, ce sont de même $\frac{\partial x}{\partial u}$, ..., de sorte que l'on a

$$(6)\qquad \cos(u, v) = \frac{\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v}}{\sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2}\sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 + \ldots}} = \frac{F}{\sqrt{EG}},$$

en désignant par (u, v) l'angle des deux courbes u et v.

Telle est la relation qui donne l'angle des deux courbes coordonnées qui se croisent en un point quelconque u, v, de la surface : on voit que si *toutes* les courbes u croisent *toutes* les courbes v à angle droit, on aura identiquement $F = 0$; récipro-

quement, si $F = 0$, les deux systèmes de lignes coordonnées sont orthogonaux.

416. Exemples. — 1° *Surfaces de révolution.* — Une surface de révolution autour de Oz a pour équation

$$z = f(\sqrt{x^2+y^2});$$

on peut donc la représenter paramétriquement par

$$x = r\cos\omega, \qquad y = r\sin\omega, \qquad z = f(r);$$

r et ω sont les coordonnées polaires de la projection du point x, y, z sur le plan des xy; la méridienne, dans le plan zOx, est $z = f(x)$.

On a

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = dr^2 + r^2\,d\omega^2 + f'^2(r)\,dr^2,$$

ou

$$ds^2 = dr^2[1+f'^2(r)] + r^2\,d\omega^2,$$

c'est-à-dire

$$E = 1+f'^2(r), \qquad F = 0, \qquad G = r^2.$$

Le terme en $dr\,d\omega$ manque : les courbes $r =$ const. (parallèles) et les courbes $\omega =$ const. (méridiens) se coupent donc à angle droit.

2° *Sphère.* — En coordonnées polaires de l'espace (n° 285), une sphère de centre O est définie par $\rho = R$; c'est-à-dire qu'on a sur la surface

$$x = R\sin\theta\cos\psi, \qquad y = R\sin\theta\sin\psi, \qquad z = R\cos\theta,$$

d'où

$$ds^2 = R^2\,d\theta^2 + R^2\sin^2\theta\,d\psi^2,$$

et, par suite,

$$E = R^2, \qquad F = 0, \qquad G = R^2\sin^2\theta.$$

3° *Hélicoïdes.* — Un hélicoïde est la surface engendrée par une courbe du plan des zx, $z = f(x)$, qui tourne autour de Oz, en se déplaçant parallèlement à Oz d'une longueur proportionnelle à l'angle dont elle tourne. On peut donc représenter para-

métriquement l'hélicoïde par les mêmes équations que la surface de révolution, en ajoutant seulement à z un terme $a\omega$, proportionnel à l'angle de rotation. Donc, pour l'hélicoïde,

$$x = r\cos\omega, \qquad y = r\sin\omega, \qquad z = f(r) + a\omega.$$

On en conclut

$$\begin{aligned} ds^2 &= dr^2 + r^2\,d\omega^2 + [f'(r)\,dr + a\,d\omega]^2 \\ &= dr^2[1 + f'^2(r)] + 2\,dr\,d\omega\,a f'(r) + d\omega^2(a^2 + r^2), \end{aligned}$$

et, par suite,

$$E = 1 + f'^2(r), \qquad F = a f'(r), \qquad G = a^2 + r^2.$$

La *surface de vis à filet carré* s'obtient en prenant pour courbe génératrice, dans le plan zOx, une droite normale à Oz, $z = h$. On a donc

$$x = r\cos\omega, \qquad y = r\sin\omega, \qquad z = h + a\omega,$$

ou, en transportant les axes parallèlement à eux-mêmes au point $x = 0$, $y = 0$, $z = h$,

$$X = r\cos\omega, \qquad Y = r\sin\omega, \qquad Z = a\omega,$$

d'où

$$ds^2 = dX^2 + dY^2 + dZ^2 = dr^2 + (r^2 + a^2)\,d\omega^2.$$

Le terme $dr\,d\omega$ manque; donc les courbes $\omega = \text{const.}$, qui sont les génératrices rectilignes, et les courbes $r = \text{const.}$, qui sont des hélices circulaires, sont orthogonales.

417. Exemple d'arc. — Considérons sur la sphère la courbe, dite *loxodromie,* définie par la relation

$$\operatorname{tang}\frac{\theta}{2} = \lambda e^{a\psi},$$

où λ et a sont des constantes, et cherchons la longueur d'un arc quelconque AB de cette courbe (*fig.* 100) : soient θ_0 et ψ_0, θ_1 et ψ_1 les coordonnées de A et B sur la sphère.

On a (n° **416**, 2°)

$$ds^2 = R^2(d\theta^2 + \sin^2\theta\,d\psi^2).$$

Or, sur la courbe proposée, en différentiant (7), on obtient

$$\frac{1}{2}\frac{d\theta}{\cos^2\frac{\theta}{2}} = \lambda a e^{a\psi}\,d\psi = a \operatorname{tang}\frac{\theta}{2}\,d\psi,$$

d'où

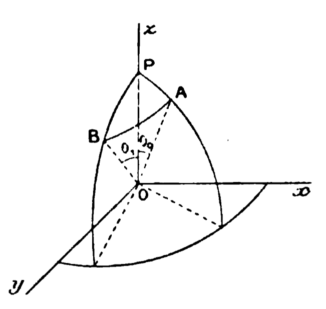
$$d\psi = \frac{d\theta}{2a\cos\frac{\theta}{2}\sin\frac{\theta}{2}} = \frac{d\theta}{a\sin\theta}.$$

Par suite, il vient

$$ds^2 = \mathrm{R}^2\,d\theta^2\left(1+\frac{1}{a^2}\right),$$

$$s = \mathrm{R}\frac{\sqrt{a^2+1}}{a}\int_{\theta_0}^{\theta_1} d\theta = \frac{\mathrm{R}}{a}\sqrt{a^2+1}\,(\theta_1-\theta_0).$$

Fig. 100.



Or $\mathrm{R}\theta_1$ est l'arc de méridien PB; de même $\mathrm{R}\theta_0$ est l'arc PA; on a donc

$$\operatorname{arc}\mathrm{AB} = \frac{\sqrt{1+a^2}}{a}(\operatorname{arc}\mathrm{PB} - \operatorname{arc}\mathrm{PA}).$$

Expression de l'élément d'aire.

418. L'aire du parallélogramme MNPQ (n° **415**), compris entre les courbes u, $u+du$; v, $v+dv$, est égal à

$$d\sigma = \mathrm{MN}.\mathrm{MQ}\sin(u,v) = \sqrt{\mathrm{EG}}\,du\,dv\sin(u,v).$$

Or on a trouvé

$$\cos(u,v) = \frac{\mathrm{F}}{\sqrt{\mathrm{EG}}},$$

d'où

$$\sin(u, v) = \frac{\sqrt{EG - F^2}}{\sqrt{EG}},$$

et, pour l'élément d'aire sur la surface,

$$d\sigma = du\, dv \sqrt{EG - F^2},$$

aux infiniment petits près du troisième ordre.

Cette formule peut se mettre sous une autre forme. En effet, si A, B, C sont les coefficients du plan tangent (n° 408),

$$A = \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v} - \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v}, \qquad \ldots,$$

on a identiquement, par la formule de Lagrange,

$$EG - F^2 = A^2 + B^2 + C^2;$$

d'où

$$d\sigma = du\, dv \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}.$$

Si la surface est donnée sous la forme $z = f(x, y)$, on a

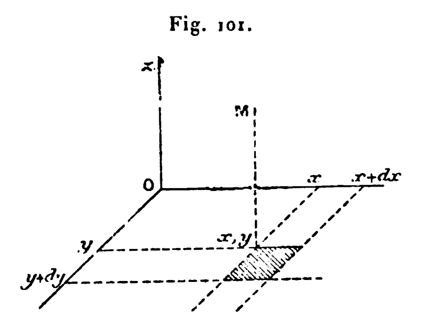
$$A = -p, \qquad B = -q, \qquad C = +1,$$

d'où

$$d\sigma = dx\, dy \sqrt{1 + p^2 + q^2},$$

formule qui peut s'établir directement. Soient en effet x, y, z les

Fig. 101.



coordonnées d'un point M de la surface; figurons sur le plan des xy les droites $X = x$, $X = x + dx$; $Y = y$, $Y = y + dy$: elles comprennent le petit rectangle ombré (*fig.* 101), d'aire $dx\, dy$.

Soit $d\sigma$ l'aire de la portion de surface, au voisinage de M, qui se projette à l'intérieur du rectangle : cette portion de surface peut être assimilée à une portion du plan tangent en M, de sorte qu'on a

$$dx\,dy = d\sigma \cos\nu,$$

ν étant l'angle du plan tangent en M avec le plan des xy. Comme $\cos\nu = \frac{1}{\sqrt{1+p^2+q^2}}$, on a bien

$$d\sigma = dx\,dy\sqrt{1+p^2+q^2}.$$

CHAPITRE V.

COURBURE DES SURFACES.

I. — COURBURE DES LIGNES TRACÉES SUR UNE SURFACE.

419. Indicatrice. — Soit la surface

$$z = f(x, y);$$

prenons pour origine un de ses points, et, pour plan des xy, le plan tangent en ce point : la cote z, développée par la formule de Maclaurin, suivant les puissances croissantes de x et y, aura une expression de la forme

$$z = \frac{1}{2}(M_1 x^2 + 2 P_1 xy + N_1 y^2) + \ldots,$$

les termes non écrits étant d'ordre supérieur à *deux* en x, y; les termes du premier degré manquent au second membre, puisque le plan tangent à l'origine est $z = 0$.

En disposant convenablement de la direction des axes des x et des y, supposés rectangulaires, on peut, *sans introduire d'imaginaires,* faire disparaître le terme en xy, et il reste

$$(1) \qquad z = \frac{1}{2}(M x^2 + N y^2) + \ldots.$$

Si l'on coupe la surface par un plan $z = h$, voisin du plan des xy, la section, pour des valeurs très petites de x et y, sera sensiblement représentée par l'équation

$$(2) \qquad h = \frac{1}{2}(M x^2 + N y^2);$$

elle sera donc semblable à la conique du plan des xy, dont les axes *toujours réels* sont Ox et Oy,

$$1 = (M x^2 + N y^2),$$

conique qu'on désigne par le nom d'*indicatrice*.

Si M et N sont de même signe, l'indicatrice est *elliptique;* alors les courbes (2) sont réelles lorsque h est du signe de **M et** de N, imaginaires dans le cas contraire; en d'autres termes, les plans parallèles au plan tangent coupent la surface, *au voisinage du point de contact,* en des points réels ou non, selon qu'ils sont situés de l'un ou de l'autre côté du plan tangent.

Si M et N sont de signes contraires, l'indicatrice est *hyperbolique;* les courbes (2) sont toujours réelles, c'est-à-dire que les plans parallèles au plan tangent coupent toujours la surface en des points réels, au voisinage du point de contact.

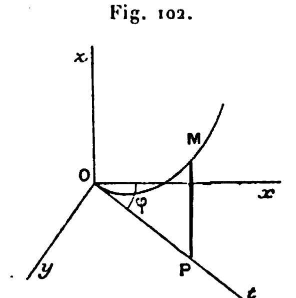
En d'autres termes, quand l'indicatrice est elliptique, la surface, au voisinage du point de contact, est située d'un même côté de son plan tangent (exemple : ellipsoïde); quand l'indicatrice est hyperbolique, la surface traverse son plan tangent (exemple : hyperboloïde à une nappe).

Enfin, si M ou N est nul, l'indicatrice est dite *parabolique,* et le point O est un *point parabolique.*

Étudions maintenant la courbure, au point O, des diverses lignes qu'on peut tracer sur la surface à partir de ce point; nous commencerons par la courbure des *sections normales.*

420. Courbure d'une section normale. — Menons par la normale Oz (*fig.* 102) un plan zOt faisant un angle φ avec le plan

Fig. 102.



des zx, et proposons-nous d'évaluer la courbure en O de la section ainsi déterminée dans la surface.

Soit M un point voisin de O sur la section, de coordonnées dx, dy, Δz; menons MP normal au plan des xy. On a, pour la

courbure, k, de la section en O (nº 399),

$$k = \text{valeur principale}\,\frac{2\,\text{MP}}{(\text{arc OM})^2} = \text{valeur principale}\,\frac{2\Delta z}{ds^2}.$$

Or, d'après l'équation (1) de la surface,

$$2\Delta z = \text{M}\,dx^2 + \text{N}\,dy^2 + \ldots;$$

donc, en prenant la valeur principale,

$$k = \text{M}\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + \text{N}\left(\frac{dy}{ds}\right)^2;$$

et, comme $\frac{dx}{ds}$, $\frac{dy}{ds}$ sont évidemment les cosinus des angles que fait, avec Ox et Oy, la tangente en O à la section OM[1], c'est-à-dire $\cos\varphi$ et $\sin\varphi$, il vient finalement

$$(3) \qquad k = \text{M}\cos^2\varphi + \text{N}\sin^2\varphi.$$

Le rayon de courbure, ρ, est l'inverse de k :

$$(3\,bis) \qquad \rho = \frac{1}{\text{M}\cos^2\varphi + \text{N}\sin^2\varphi}.$$

Or, le carré du demi-diamètre, dirigé suivant Ot, de l'indicatrice $\text{M}x^2 + \text{N}y^2 = 1$, est précisément $1 : (\text{M}\cos^2\varphi + \text{N}\sin^2\varphi)$; donc :

Théorème. — *Le rayon de courbure en O, d'une section normale, est égal au carré du demi-diamètre de l'indicatrice, dirigé suivant la trace de la section sur le plan tangent en O.*

421. Rayons et centres de courbure principaux. — En vertu de ce théorème, le rayon de courbure d'une section normale est *maximum* ou *minimum* quand la trace de la section est un des axes de l'indicatrice, c'est-à-dire quand $\varphi = 0$ ou $\varphi = \frac{\pi}{2}$. Les deux valeurs correspondantes du rayon de courbure, à savoir

$$\rho_1 = \frac{1}{\text{M}}, \qquad \rho_2 = \frac{1}{\text{N}},$$

---

(1) Car $\frac{dx}{ds}$, $\frac{dy}{ds}$, $\frac{dz}{ds}$ sont les cosinus directeurs des angles que fait la tangente en un point d'une courbe gauche avec les trois axes.

se nomment *rayons de courbure principaux de la surface au point* O. Ils sont de même signe ou de signes contraires selon que l'indicatrice est elliptique ou hyperbolique. Si l'indicatrice est une hyperbole équilatère, $M = -N$; les rayons de courbure principaux sont égaux et de signe contraire, et réciproquement.

Si l'indicatrice est parabolique (c'est-à-dire en un point parabolique), M ou N est nul; un des rayons de courbure principaux est donc infini, et réciproquement.

Les *centres de courbure principaux* sont les centres de courbure des sections normales menées par les axes de l'indicatrice; ils sont donc sur la normale Oz, à des distances de son pied, O, égales à ρ_1 et à ρ_2.

422. Définitions. — On nomme :

1° *Directions principales au point* O, celles, toujours réelles (n° 419), des axes de l'indicatrice;

2° *Directions asymptotiques*, celles des asymptotes, réelles ou imaginaires, de l'indicatrice. Leur équation est $Mx^2 + Ny^2 = 0$ dans le plan des xy; elles sont également inclinées sur les directions principales.

Si φ est l'angle d'une direction asymptotique avec Ox, on a $M\cos^2\varphi + N\sin^2\varphi = 0$; par suite, en vertu de (3) ou de (3 *bis*), les sections normales menées par les asymptotes de l'indicatrice ont, au point O, leur rayon de courbure infini, et *réciproquement*.

Les asymptotes de l'indicatrice au point O sont les deux tangentes, en ce point, à la section de la surface par son plan tangent; car cette section a pour équation $0 = \frac{1}{2}(Mx^2 + Ny^2) + \ldots$. On en conclut que chacune de ces droites coupe la surface en trois points confondus avec O.

3° *Plans principaux*, les deux plans normaux à la surface qui passent par les axes de l'indicatrice; ils sont rectangulaires.

423. Remarques. — La normale à la surface

$$z = \frac{1}{2}(Mx^2 + Ny^2) + \ldots,$$

en un point x, y, z voisin de O, a pour équations

$$\frac{X-x}{Mx+\ldots}=\frac{Y-y}{Ny+\ldots}=\frac{Z-z}{-1}.$$

Pour qu'elle rencontre la normale en O, c'est-à-dire l'axe des z, il faut que $\frac{-x}{Mx+\ldots}=\frac{-y}{Ny+\ldots}$; ou

$$xy(M-N)+\ldots=0,$$

les termes non écrits étant d'ordre supérieur au terme conservé. Si donc $M \gtrless N$, c'est-à-dire si l'indicatrice n'est pas un cercle, on aura à la limite $x=0$ ou $y=0$; en d'autres termes :

Pour que la normale à la surface en un point O_1, *infiniment voisin de* O, *rencontre la normale en* O, *il faut et il suffit que la direction* OO_1 *ait pour limite une des directions principales au point* O.

Si la direction OO_1 est $x=0$, on trouve, pour le z du point de rencontre de la normale en O_1 et de l'axe des z, la valeur $\frac{1}{N}$; de même, pour la direction $y=0$, on aurait $\frac{1}{M}$; donc :

Les deux points où la normale à la surface en O *est coupée par une normale infiniment voisine sont les deux centres de courbure principaux.*

Sous une autre forme :

Les normales à une surface forment une congruence; les deux points focaux situés sur chaque normale sont les centres de courbure principaux de la surface pour le pied de la normale; enfin, d'après ce qui précède et le n° 369, *les deux plans focaux sont les deux plans principaux de la surface au même point.*

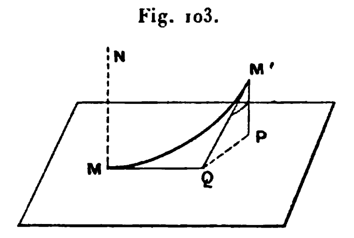
424. Courbure d'une ligne quelconque. — Prenons maintenant une surface représentée paramétriquement par les relations

$$(4)\qquad x=x(u,v),\qquad y=y(u,v),\qquad z=z(u,v);$$

et soient u, v les paramètres d'un point quelconque $M(x, y, z)$ de la surface.

Considérons sur la surface *une courbe quelconque* MM′ passant par M (*fig.* 103); pour évaluer sa courbure k, en M, menons de M′, infiniment voisin de M sur la courbe, une normale M′P au

Fig. 103.



plan tangent à la surface en M, et une perpendiculaire M′Q sur la tangente à la courbe en M.

On a (n° 399)

$$k = \lim \frac{2\,M'Q}{\overline{MM'}^2}.$$

D'ailleurs,

$$M'Q = \frac{M'P}{\cos \widehat{QM'P}},$$

ce qui donne

$$k = \lim 2 \frac{M'P}{\overline{MM'}^2 \cos \widehat{QM'P}}.$$

Si l'on désigne par $u + du$, $v + dv$ les paramètres du point M′, la valeur principale de $2\,M'P$ est (n° 409)

$$R\,du^2 + 2S\,du\,dv + T\,dv^2;$$

celle de $\overline{MM'}^2$ est (n° 412)

$$E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2;$$

E, F, G, R, S, T étant des fonctions connues de u, v, dont les expressions ont été données aux n°s 409 et 412. Quant à l'angle QM′P, c'est celui du plan MQM′ avec la normale MN à la surface en M; à la limite, le plan MQM′, qui passe par la tangente MQ à la courbe MM′ et par le point voisin M′, devient le plan osculateur en M à cette courbe (n° 386); si donc θ est l'angle que fait, avec la normale en M, le plan osculateur de la courbe considérée au même point M, on a, pour la courbure de la courbe

en M,

$$k = \frac{R\,du^2 + 2S\,du\,dv + T\,dv^2}{E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2}\,\frac{1}{\cos\theta}, \tag{5}$$

formule très importante dont on va déduire de nombreuses conséquences.

425. On voit d'abord que, en un point u, v, k ne dépend que de $\frac{dv}{du}$, c'est-à-dire de la direction de la tangente en M à la courbe considérée, et de θ, c'est-à-dire du plan osculateur en M. Donc :

Théorème I. — *La courbure en un point* M *d'une ligne tracée sur une surface est la même que celle de toute autre courbe de la surface, ayant en* M *même tangente et même plan osculateur que la première.*

En particulier :

La courbure en un point M *d'une ligne tracée sur une surface est la même que celle de la section déterminée dans la surface par le plan osculateur de la ligne au point* M.

Ce théorème ramène l'étude de la courbure des lignes tracées sur la surface à l'étude de la courbure des sections planes.

426. Courbure d'une section plane. — Considérons deux sections planes passant par la même tangente en M à la surface; $\frac{dv}{du}$ est le même au point M pour les deux courbes sections. Soit θ l'angle que fait le plan de la première section avec la normale à la surface en M; on a, pour la courbure de cette section en M,

$$k = \frac{R\,du^2 + 2S\,du\,dv + T\,dv^2}{E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2}\,\frac{1}{\cos\theta}.$$

Supposons que la seconde section contienne la normale en M; l'angle θ correspondant est nul, et la courbure de la section en M est

$$k_0 = \frac{R\,du^2 + 2S\,du\,dv + T\,dv^2}{E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2}, \tag{6}$$

d'où

$$k_0 = k \cos\theta;$$

c'est le *Théorème de Meusnier,* qui s'énonce ainsi :

THÉORÈME II. — *Le rayon (ou le centre) de courbure, au point* M, *d'une section plane quelconque passant par* M *est la projection du rayon (ou du centre) de courbure de la section normale menée par la même tangente.*

Cette proposition ramène l'étude de la courbure des sections planes à celle de la courbure des sections normales, faite directement au n° 420.

427. Autres conséquences. — La formule (6), qui donne la courbure d'une section normale, va maintenant nous permettre de déterminer, en un point quelconque de la surface (4), les rayons de courbure principaux, les directions principales et asymptotiques, les points paraboliques, etc. Écrivons cette équation en faisant apparaître le rayon de courbure ρ, au lieu de la courbure k_0 qui est son inverse :

$$\rho = \frac{E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2}{R\,du^2 + 2S\,du\,dv + T\,dv^2}; \tag{7}$$

ce qu'on peut écrire aussi :

$$(E - \rho R)\,du^2 + 2(F - \rho S)\,du\,dv + (G - \rho T)\,dv^2 = 0. \tag{8}$$

Cette formule, (7) ou (8), donne le rayon de courbure, au point (u, v), de la section normale menée par la tangente dont la direction est définie par le rapport $\frac{dv}{du}$ (n° 411).

Rayons de courbure principaux. — On les obtiendra, d'après le n° 421, en cherchant le maximum et le minimum de ρ quand $\frac{du}{dv}$ varie; ces valeurs se trouvent, d'après une méthode élémentaire connue, en exprimant que l'équation (8), considérée comme équation du second degré en $\frac{du}{dv}$, a ses racines égales. On a ainsi

$$(F - \rho S)^2 - (E - \rho R)(G - \rho T) = 0, \tag{9}$$

équation du second degré en ρ, fournissant les valeurs des rayons de courbure principaux cherchés, au point d'arguments u et v.

Directions principales. — Les valeurs de $\frac{du}{dv}$ qui correspondent aux directions principales sont celles pour lesquelles ρ est maximum ou minimum; donc, en vertu de ce qui précède, quand l'équation (8), en $\frac{du}{dv}$, a une racine double, cette racine correspond à une direction principale : elle satisfait aux deux équations qu'on obtient en dérivant (8) par rapport à du et à dv, ce qui donne

$$(10) \qquad (E - \rho R)\,du + (F - \rho S)\,dv = 0,$$

$$(11) \qquad (F - \rho S)\,du + (G - \rho T)\,dv = 0,$$

et, en éliminant ρ,

$$\frac{E\,du + F\,dv}{F\,du + G\,dv} = \frac{R\,du + S\,dv}{S\,du + T\,dv},$$

c'est-à-dire

$$(12) \qquad \begin{vmatrix} E & F & G \\ R & S & T \\ dv^2 & -du\,dv & du^2 \end{vmatrix} = 0.$$

Telle est l'équation qui donne les deux valeurs de $\frac{du}{dv}$ qui correspondent aux directions principales; on peut y remplacer R, S, T par leurs valeurs proportionnelles (n° **409**). De même, il suffirait de connaître les valeurs proportionnelles de E, F, G.

Directions asymptotiques. — Les sections normales menées par les asymptotes de l'indicatrice en M ont, en ce point, leur rayon de courbure infini (n° **422**) et réciproquement.

On obtiendra donc les directions asymptotiques en écrivant que l'équation (7) donne, pour ρ, une valeur infinie, d'où :

$$(13) \qquad R\,du^2 + 2S\,du\,dv + T\,dv^2 = 0.$$

Ici encore on peut substituer à R, S, T leurs valeurs proportionnelles.

Points paraboliques. — Ce sont les points où l'un des rayons de courbure principaux est infini (n° **421**); l'équation (9) en ρ aura

donc, pour un de ces points, une racine infinie, d'où

$$(14) \qquad S^2 - RT = 0.$$

C'est là une relation entre u et v, qui définit sur la surface une ligne, dite *ligne parabolique,* dont tous les points sont paraboliques.

Ombilics. — On nomme *ombilic* tout point où l'indicatrice est un cercle : les directions principales (axes de l'indicatrice) sont alors indéterminées, c'est-à-dire que, dans l'équation (12), les coefficients de du^2, $du\,dv$, dv^2 sont nuls, ce qui donne

$$(15) \qquad \frac{E}{R} = \frac{F}{S} = \frac{G}{T}.$$

On a ainsi *deux équations* entre u et v, qui déterminent, sur la surface, un *nombre limité* de points, lesquels sont les ombilics.

428. Si la surface est donnée sous la forme $z = f(x, y)$, on supposera, pour appliquer les formules ci-dessus, $u = x$, $v = y$; d'où, puisque $A = -p$, $B = -q$, $C = 1$,

$$\sqrt{1+p^2+q^2}\,R = A\frac{\partial^2 x}{\partial u^2} + B\frac{\partial^2 y}{\partial u^2} + C\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = r,$$
$$\sqrt{1+p^2+q^2}\,S = A\frac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial v} + B\frac{\partial^2 y}{\partial u\,\partial v} + C\frac{\partial^2 z}{\partial u\,\partial v} = \frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} = s,$$
$$\sqrt{1+p^2+q^2}\,T = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = t,$$

et l'on a trouvé (n° **414**)

$$E = 1 + p^2, \qquad F = pq, \qquad G = 1 + q^2.$$

L'équation (9), aux *rayons de courbure principaux,* devient ainsi :

$$(9\ bis) \quad \left\{ \begin{aligned} &\left(pq - \frac{\rho s}{\sqrt{1+p^2+q^2}}\right)^2 - \left(1 + p^2 - \frac{\rho r}{\sqrt{1+p^2+q^2}}\right) \\ &\qquad \times \left(1 + q^2 - \frac{\rho t}{\sqrt{1+p^2+q^2}}\right) = 0. \end{aligned} \right.$$

L'équation (12), aux *directions principales,* devient :

$$(12\ bis) \qquad \begin{vmatrix} 1+p^2 & pq & 1+q^2 \\ r & s & t \\ dy^2 & -dx\,dy & dx^2 \end{vmatrix} = 0.$$

L'équation (13), aux *directions asymptotiques,* devient :

(13 *bis*) $$r\,dx^2 + 2s\,dx\,dy + t\,dy^2 = 0.$$

Les *points paraboliques* sont donnés par :

(14 *bis*) $$s^2 - rt = 0,$$

et les *ombilics* par :

(15 *bis*) $$\frac{1+p^2}{r} = \frac{pq}{s} = \frac{1+q^2}{t}.$$

II. — LIGNES DE COURBURE, LIGNES ASYMPTOTIQUES.

429. Lignes de courbure. — On nomme *lignes de courbure* sur une surface les lignes qui, en chacun de leurs points, sont tangentes à une des directions principales en ce point.

Les directions principales de la surface proposée, au point u, v, sont définies par l'équation (12), qui est de la forme

(12) $$a(u,v)\,du^2 + 2b(u,v)\,du\,dv + c(u,v)\,dv^2 = 0,$$

a, b, c étant des fonctions connues de u et de v; une ligne $v = \varphi(u)$, tracée sur la surface, sera donc une ligne de courbure si la valeur $\frac{dv}{du} = \varphi'(u)$, qui correspond à la direction de sa tangente (n° **411**), vérifie l'équation (12) *en tous les points de la ligne,* c'est-à-dire si l'on a, *quel que soit* u,

$$a[u, \varphi(u)] + 2b[u, \varphi(u)]\,\varphi'(u) + c[u, \varphi(u)]\,\varphi'^2(u) = 0.$$

Le problème est donc ramené à trouver une fonction, $\varphi(u)$, vérifiant cette relation, qui est une *équation différentielle du premier ordre.*

La recherche de la fonction $\varphi(u)$, c'est-à-dire des lignes de courbure, revient donc à l'intégration de l'équation différentielle, où nous récrivons v à la place de $\varphi(u)$,

$$a(u,v) + 2b(u,v)\frac{dv}{du} + c(u,v)\left(\frac{dv}{du}\right)^2 = 0,$$

c'est-à-dire, d'après (12),

$$\begin{vmatrix} E & F & G \\ R & S & T \\ \left(\frac{dv}{du}\right)^2 & -\frac{dv}{du} & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

où E, F, G, R, S, T sont des fonctions données de u, v.

On établira, dans le Cours de seconde année, que la solution générale, v, d'une équation différentielle du premier ordre renferme une constante *arbitraire,* c'est-à-dire que l'on a

$$v = \varphi(u, C).$$

La fonction v étant trouvée par un procédé d'intégration quelconque, les lignes de courbure s'obtiendront en remplaçant v par sa valeur en u dans les équations qui définissent paramétriquement la surface (4); une quelconque de ces lignes sera donc donnée paramétriquement par

$$x = x[u, \varphi(u, C)], \quad y = \ldots, \quad z = \ldots.$$

En faisant varier C, on aura ainsi une infinité simple de lignes de courbure.

Comme il y a en chaque point deux directions principales toujours réelles, il y aura deux lignes de courbures réelles passant par tout point de la surface. En d'autres termes, les lignes de courbure forment deux séries réelles, et, de plus, les courbes d'une série coupent à angle droit toutes les courbes de l'autre, puisque les directions principales en un point sont rectangulaires.

430. Lignes asymptotiques. — On nomme *asymptotiques* les lignes tracées sur une surface et qui touchent, en chacun de leurs points, une des directions asymptotiques en ce point. On les trouvera, en vertu du raisonnement fait pour les lignes de courbure, en intégrant l'équation (13) aux directions asymptotiques,

$$R + 2S\frac{dv}{du} + T\left(\frac{dv}{du}\right)^2 = 0,$$

où R, S, T sont des fonctions connues de u et v.

Il y a évidemment deux lignes asymptotiques passant par chaque point de la surface, c'est-à-dire que ces lignes forment deux séries;

mais les lignes asymptotiques passant par un point ne sont pas nécessairement réelles : elles sont réelles si l'indicatrice en ce point est hyperbolique; imaginaires si l'indicatrice est elliptique. Par exemple, sur une surface fermée convexe, comme l'ellipsoïde, les lignes asymptotiques sont toutes imaginaires.

Remarque. — D'après cela, on obtient l'équation différentielle des asymptotiques en annulant la quantité δ, valeur principale de la distance du point $(u+du, v+dv)$ de la surface au plan tangent en (u, v); or, nous avons vu (n° **410**) que δ garde, à un facteur près, la même forme quels que soient les angles des axes; donc, en coordonnées cartésiennes, rectangulaires ou obliques, l'équation différentielle des lignes asymptotiques est toujours

$$\begin{aligned} o = du^2\left(A\frac{\partial^2 x}{\partial u^2}+B\frac{\partial^2 y}{\partial u^2}+C\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}\right) \\ +2du\,dv\left(A\frac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial v}+\ldots\right)+dv^2\left(A\frac{\partial^2 x}{\partial v^2}+\ldots\right). \end{aligned}$$

431. Autre définition des lignes de courbure. — D'après le n° **423**, si O et O_1 sont deux points infiniment voisins sur une ligne de courbure, les normales à la surface en ces deux points se rencontrent (aux infiniment petits près d'ordre supérieur à OO_1). Il en résulte (n° **365**) que les normales à une surface le long d'une ligne de courbure enveloppent une courbe, c'est-à-dire forment une surface développable. On peut le vérifier en cherchant à déterminer directement les lignes qui possèdent cette propriété.

La surface étant $z=f(x,y)$, la normale au point x, y, z est

$$X-x+p(Z-z)=o, \qquad Y-y+q(Z-z)=o.$$

Supposons maintenant que le point x, y, z décrive une courbe sur la surface; y et z sont des fonctions de x, seule variable indépendante, et la condition pour que les normales considérées admettent une enveloppe est, d'après la formule (10) du n° **366**,

$$\frac{dp}{dx}\frac{d}{dx}(y+qz)=\frac{dq}{dx}\frac{d}{dx}(x+pz),$$

ou, après développement et réductions,

$$\frac{dp}{dx}\left(\frac{dy}{dx}+q\frac{dz}{dx}\right)=\frac{dq}{dx}\left(1+p\frac{dz}{dx}\right),$$

et, puisque

$$\frac{dp}{dx} = r + s\frac{dy}{dx}, \qquad \frac{dq}{dx} = s + t\frac{dy}{dx}, \qquad \frac{dz}{dx} = p + q\frac{dy}{dx},$$

il vient

$$\left(r + s\frac{dy}{dx}\right)\left[\frac{dy}{dx}(1 + q^2) + pq\right] = \left(s + t\frac{dy}{dx}\right)\left(1 + p^2 + pq\frac{dy}{dx}\right).$$

On retrouve ainsi l'équation différentielle (12 *bis*) des lignes de courbure, ce qui établit la proposition.

432. Autre définition des lignes asymptotiques. — Cherchons sur une surface les lignes qui admettent pour plan osculateur, en chacun de leurs points, le plan tangent à la surface en ce point.

Soient u, v et $u + du$, $v + dv$ les paramètres de deux points voisins, M et M′, sur une telle ligne : pour que le plan tangent en M soit osculateur à la courbe, il faut et il suffit, d'après la théorie du contact, que la distance de M′ à ce plan soit du troisième ordre par rapport à MM′. Or, la distance de M′ au plan tangent en M a pour expression (n° 409)

$$\frac{1}{2}(\mathrm{R}\, du^2 + 2\mathrm{S}\, du\, dv + \mathrm{T}\, dv^2) + \ldots,$$

les termes non écrits étant d'ordre trois au moins en du et dv; pour qu'elle soit du troisième ordre, il est nécessaire et suffisant que les termes d'ordre deux disparaissent, c'est-à-dire que du et dv soient liés par l'équation

$$\mathrm{R}\, du^2 + 2\mathrm{S}\, du\, dv + \mathrm{T}\, dv^2 = 0,$$

qui est l'équation aux directions asymptotiques. En d'autres termes, les courbes cherchées ont pour direction de tangente, en chacun de leurs points, une des directions asymptotiques en ce point; elles coïncident donc avec les lignes asymptotiques.

Exemples.

433. Hélicoïdes. — Un hélicoïde d'axe Oz est défini paramétriquement (n° 416) par

$$(16) \qquad x = r\cos\omega, \qquad y = r\sin\omega, \qquad z = f(r) + a\omega,$$

r et ω étant les paramètres désignés par u et v. On en conclut

$$A = \frac{\partial y}{\partial r}\frac{\partial z}{\partial \omega} - \frac{\partial z}{\partial r}\frac{\partial y}{\partial \omega} = - rf'(r)\cos\omega + a\sin\omega,$$
$$B = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = - rf'(r)\sin\omega - a\cos\omega,$$
$$C = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = r.$$

D'ailleurs on a (n° 416)

$$E = 1 + f'^2(r), \qquad F = af'(r), \qquad G = r^2 + a^2,$$

et

$$R\sqrt{A^2+B^2+C^2} = A\frac{\partial^2 x}{\partial r^2} + B\frac{\partial^2 y}{\partial r^2} + C\frac{\partial^2 z}{\partial r^2} = rf''(r),$$
$$S\sqrt{A^2+B^2+C^2} = A\frac{\partial^2 x}{\partial r\,\partial\omega} + \ldots\ldots\ldots\ldots = -a,$$
$$T\sqrt{A^2+B^2+C^2} = A\frac{\partial^2 x}{\partial \omega^2} + \ldots\ldots\ldots\ldots = r^2 f'(r).$$

L'équation différentielle des *lignes asymptotiques* est donc

(17) $$rf''(r)\,dr^2 - 2a\,dr\,d\omega + r^2 f'(r)\,d\omega^2 = 0:$$

d'où l'on tire

$$\frac{dr}{d\omega} = \frac{a \pm \sqrt{a^2 - r^2 f'(r) f''(r)}}{rf''(r)}.$$

On peut réunir dans un membre les termes en r, dans l'autre membre les termes en ω, en écrivant (*séparation des variables*) :

$$dr\left(\frac{rf''(r)}{a \pm \sqrt{a^2 - r^2 f'(r) f''(r)}}\right) = d\omega,$$

d'où, en intégrant les deux membres,

$$\int \frac{rf''(r)\,dr}{a \pm \sqrt{a^2 - r^3 f'(r) f''(r)}} = \omega + \text{const.}$$

On trouvera donc l'équation des asymptotiques en effectuant une quadrature; le signe $\pm$ donnera les deux séries de ces lignes. Par exemple, pour la *surface de vis à filet carré*, $f(r)$ est nul (n° 416), et les asymptotiques sont données par l'équation (17), où $f = f' = f'' = 0$. Il reste

$$dr\,d\omega = 0,$$

d'où les deux solutions

$r =$ const., ce qui donne des hélices circulaires (n° **407**, 2°);

$\omega =$ const., ce qui donne les génératrices rectilignes.

Les *lignes de courbure* de l'hélicoïde général (16) sont données par l'équation

$$\begin{vmatrix} 1+f'^2(r) & af'(r) & r^2+a^2 \\ rf''(r) & -a & r^2 f'(r) \\ d\omega^2 & -dr\,d\omega & dr^2 \end{vmatrix} = 0.$$

Elle est de la forme

$$M\,dr^2 + 2N\,dr\,d\omega + P\,d\omega^2 = 0,$$

M, N, P étant fonctions de r *seul*. On en tirera donc, pour $\frac{dr}{d\omega}$, deux valeurs

$$\frac{dr}{d\omega} = \varphi_1(r), \qquad \frac{dr}{d\omega} = \varphi_2(r),$$

d'où

$$\frac{dr}{\varphi_1(r)} = d\omega, \qquad \frac{dr}{\varphi_2(r)} = d\omega,$$

et les lignes de courbure des deux séries seront données par les équations

$$\int \frac{dr}{\varphi_1(r)} = \omega + \text{const.}, \qquad \int \frac{dr}{\varphi_2(r)} = \omega + \text{const.}$$

On a ainsi des relations entre r et ω, qui, à cause de la signification géométrique de r et de ω, représentent les équations des projections des lignes de courbure sur le plan des xy, en coordonnées polaires.

Pour la *surface de vis à filet carré*, l'équation des lignes de courbure est, en faisant $f = f' = f'' = 0$,

$$0 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & a^2+r^2 \\ 0 & -a & 0 \\ d\omega^2 & -dr\,d\omega & dr^2 \end{vmatrix},$$

ou

$$dr^2 = (r^2+a^2)\,d\omega^2,$$

ce qui s'écrit, en séparant les variables,

$$\frac{dr}{\sqrt{r^2+a^2}} = \pm\, d\omega,$$

et, en intégrant,

$$\log(r+\sqrt{r^2+a^2}) = \pm\,\omega + \log c,$$

$$r+\sqrt{r^2+a^2} = ce^{\pm\omega};$$

d'où, par un calcul facile,

$$2r = ce^{\pm\omega} - \frac{a^2}{c}e^{\mp\omega}.$$

434. Surfaces de révolution. — Il suffit de faire $a = 0$ dans les formules précédentes pour qu'elles s'appliquent à la surface de révolution autour de Oz :

$$x = r\cos\omega, \qquad y = r\sin\omega, \qquad z = f(r).$$

L'équation différentielle des *lignes de courbure* est donc

$$\begin{vmatrix} 1+f'^2(r) & 0 & r^2 \\ rf''(r) & 0 & r^2f'(r) \\ d\omega^2 & -dr\,d\omega & dr^2 \end{vmatrix} = 0,$$

ou

$$r^2dr\,d\omega\,\{f'(r)[1+f'^2(r)] - rf''(r)\} = 0.$$

En général, le coefficient de $dr\,d\omega$ n'est pas nul; l'équation différentielle se réduit donc à $dr\,d\omega = 0$; ce qui donne, pour les lignes de courbure, les méridiens ($\omega =$ const.) et les parallèles ($r =$ const.). Ce résultat est géométriquement évident, car les normales à une surface de révolution le long d'un méridien ou d'un parallèle engendrent une surface développable, plan ou cône.

Si le coefficient de $dr\,d\omega$ était nul, l'équation différentielle des lignes de courbure serait indéterminée, c'est-à-dire que toutes les directions seraient principales autour d'un point quelconque : une ligne quelconque tracée sur la surface serait alors ligne de courbure. En ce cas, la fonction $f(r)$ vérifie l'équation

$$f'(r)[1+f'^2(r)] = rf''(r),$$

qui s'écrit, en séparant f et r,

$$\frac{1}{r} = \frac{f''(r)}{f'(1+f'^2)} = f''(r)\left(\frac{1}{f'(r)} - \frac{f'(r)}{1+f'^2(r)}\right).$$

Le premier membre est la dérivée de $\log r$, le dernier est celle

de $\log f'(r) - \frac{1}{2}\log[1 + f'^2(r)]$; on a donc

$$\log r = \log f'(r) - \log\sqrt{1 + f'^2(r)} + \log c,$$

c'est-à-dire

$$r = \frac{c f'(r)}{\sqrt{1 + f'^2(r)}} \quad \text{ou} \quad f'(r) = \frac{r}{\sqrt{c^2 - r^2}},$$

et, en remontant encore aux primitives, on trouve

$$f(r) = -\sqrt{c^2 - r^2} - c'.$$

La méridienne, dans le plan zOx, est $z = f(x)$; elle a donc pour équation

$$z + \sqrt{c^2 - x^2} + c' = 0,$$

c'est-à-dire

$$x^2 + z^2 + 2c'z + c'^2 - c^2 = 0;$$

c'est un cercle ayant son centre sur Oz. La surface est une *sphère*.

Il est évident, *a priori*, que les lignes de courbure de la sphère sont indéterminées, car toutes les normales concourent au centre, de sorte que toutes les directions autour d'un point sont des directions principales (n° 423).

Les lignes de courbure du plan sont également indéterminées.

435. **Surfaces réglées.** — Une droite située sur une surface est nécessairement une ligne asymptotique de cette surface : car le plan tangent en un quelconque M des points de la droite contient celle-ci, qui est, dès lors, une des tangentes, en M, à la courbe d'intersection du plan et de la surface (n° 422, 2°).

Donc, sur une surface réglée, une des deux séries de *lignes asymptotiques* est formée par les génératrices rectilignes.

Sur les quadriques, les deux systèmes de génératrices rectilignes donnent les deux séries d'asymptotiques.

436. **Surfaces développables.** — Sur une surface développable, tous les points sont paraboliques, car l'équation

$$(14\ bis) \qquad rt - s^2 = 0,$$

qui donne ces points (n° 428), est vérifiée en tous les points de la

surface (nº 127); il en résulte qu'en chaque point les deux directions asymptotiques coïncident, c'est-à-dire qu'il n'y a qu'une série de lignes asymptotiques. La surface étant réglée, ces lignes sont les génératrices rectilignes.

Les génératrices rectilignes forment également une des séries de lignes de courbure. Car les directions asymptotiques en un point d'une surface sont également inclinées sur les directions principales, et, par suite, si elles coïncident entre elles, elles coïncident aussi avec une des directions principales : donc, en tout point d'une surface développable, une des directions principales est celle de l'asymptotique qui passe par ce point, c'est-à-dire celle de la génératrice.

Les lignes de courbure du second système sont les trajectoires orthogonales des génératrices.

III. — THÉORÈMES SUR LES LIGNES DE COURBURE ET ASYMPTOTIQUES.

Théorème de Joachimstahl.

437. *Si une ligne de courbure d'une surface est plane, son plan coupe la surface sous un angle constant, et réciproquement.*

Soit $z = f(x, y)$ la surface donnée; prenons le plan de la ligne considérée pour plan des xz : l'équation (12 *bis*) des lignes de courbure, à savoir

$$(1) \qquad \begin{vmatrix} 1+p^2 & pq & 1+q^2 \\ r & s & t \\ \left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2 & -\dfrac{dy}{dx} & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

devra être vérifiée, quel que soit x, pour $y = 0$, $\dfrac{dy}{dx} = 0$, ce qui donne

$$(2) \qquad s(x, 0)[1 + p^2(x, 0)] - r(x, 0)\,p(x, 0)\,q(x, 0) = 0.$$

On peut écrire, en posant pour abréger $r(x, 0) = r_0(x), \ldots,$

$$(3) \qquad \frac{s_0(x)}{q_0(x)} = \frac{p_0(x)\, r_0(x)}{1 + p_0^2(x)}.$$

D'ailleurs, comme $s = \frac{\partial q}{\partial x}$, on a

$$s_0(x) = \frac{dq_0}{dx},$$

et de même

$$r_0(x) = \frac{dp_0}{dx};$$

on voit ainsi que le premier membre de (3) est la dérivée de $\log q_0(x)$; le second la dérivée de $\frac{1}{2}\log[1 + p_0^2(x)]$; on a donc, en remontant aux primitives,

$$(4) \qquad c q_0(x) = \sqrt{1 + p_0^2(x)},$$

c étant une constante arbitraire. Cette formule démontre le théorème, car, en un point $(x, 0, z)$ du plan des xz, le plan tangent à la surface a pour coefficients $p(x, 0)$, $q(x, 0)$ et -1, c'est-à-dire $p_0(x)$, $q_0(x)$ et -1; l'angle V qu'il fait avec le plan des xz est donc donné par

$$(5) \qquad \cos V = \frac{q_0(x)}{\sqrt{p_0^2(x) + q_0^2(x) + 1}} = \frac{q_0(x)}{\sqrt{q_0^2(x)(1 + c^2)}} = \frac{1}{\sqrt{1 + c^2}},$$

en tenant compte de (4) : l'angle V est donc constant.

Réciproquement, si le plan des xz coupe la surface sous un angle constant, on en déduit la relation (4); puis, en la dérivant logarithmiquement en x, les relations (3) et (2), ce qui montre que l'équation (1) des lignes de courbure est satisfaite pour $y = 0$, $\frac{dy}{dx} = 0$; la section par le plan des xz est donc une ligne de courbure (¹). C. Q. F. D.

(¹) Plus généralement, d'après Joachimstahl, *si deux surfaces* S *et* Σ *admettent une même ligne de courbure,* C, *elles se coupent, le long de cette ligne, sous un angle constant.* En effet, les normales à S le long de C forment une développable, c'est-à-dire touchent une courbe, qui est dès lors une développée de C; de même les normales à Σ le long de C touchent une autre déve-

438. Corollaire I. — Considérons une surface Σ, enveloppe d'une infinité *simple* de sphères; elle est touchée par une quelconque de ces sphères suivant un cercle (nº 362), les plans tangents le long de ce cercle (qui sont ceux de la sphère) font un angle constant avec le plan de la circonférence, et par suite, d'après le théorème précédent, celle-ci est une ligne de courbure de la surface. Ainsi :

Sur une surface enveloppe de sphères, une des deux séries de lignes de courbure est formée par les cercles suivant lesquels la surface touche les sphères enveloppées.

Les lignes de courbure de l'autre série sont les trajectoires orthogonales de ces cercles.

439. Corollaire II. — Réciproquement, si une série de lignes de courbure se compose de cercles, le plan de chacun d'eux coupe la surface sous un angle constant, c'est-à-dire qu'il existe une sphère tangente à la surface tout le long du cercle. La surface proposée est donc une enveloppe de sphères; ainsi :

Si les lignes de courbure d'une série sont des cercles, la surface est l'enveloppe d'une famille de sphères dont chacune la touche suivant un de ces cercles.

440. Problème. — *Trouver une surface dont toutes les lignes de courbure soient des cercles.* — En vertu de ce qui précède, cette surface sera l'enveloppe de deux familles différentes de sphères, simplement infinie chacune. Je dis que chaque sphère d'une famille touche chaque sphère de l'autre famille. Soit, en

---

loppée de C : donc, en vertu du nº 406, les normales à S et à Σ en un même point de C se coupent sous un angle constant.

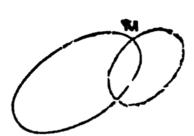
Réciproquement, on établit de même que, *si deux surfaces se coupent sous un angle constant le long d'une ligne de courbure de l'une, cette intersection est une ligne de courbure de l'autre.*

Sur un plan ou sur une sphère, toute courbe est une ligne de courbure, et par là se trouve établi, non seulement le théorème du texte, mais le théorème analogue, où l'on substitue la sphère au plan.

effet, M (*fig.* 104) un point quelconque de la surface; figurons les deux lignes de courbure circulaires qui s'y croisent; les sphères, appartenant à deux familles différentes, qui touchent la surface le long de ces deux cercles, se touchent dès lors en M, ce qui établit la proposition.

La surface inconnue ne peut donc être que l'enveloppe des

Fig. 104.



sphères, en nombre simplement infini, qui touchent trois sphères fixes, c'est-à-dire la *cyclide de Dupin* rencontrée au n° **112**.

Réciproquement on a vu (n° **112**) que cette cyclide est bien l'enveloppe de deux familles de sphères, simplement infinie chacune : la surface à lignes de courbure circulaires dans les deux systèmes est donc la *cyclide de Dupin*.

On peut montrer, avec M. Mannheim, qu'elle est la transformée, par rayons vecteurs réciproques, d'un tore.

Soient, en effet, Σ_1, Σ_2, Σ_3 les trois sphères fixes; dans le plan qui contient leurs centres on peut tracer un cercle qui les coupe orthogonalement, car il y a toujours un cercle orthogonal à trois cercles d'un plan. Si l'on fait une transformation par rayons vecteurs réciproques en prenant le pôle sur ce cercle, le cercle devient une droite, Δ, orthogonale aux sphères Σ'_1, Σ'_2, Σ'_3, transformées des trois sphères primitives : les sphères Σ'_1, Σ'_2, Σ'_3 ont donc leurs centres en ligne droite sur Δ.

Toutes les sphères qui touchent Σ'_1, Σ'_2, Σ'_3 s'obtiennent évidemment en faisant tourner une (ou plusieurs) d'entre elles autour de la ligne des centres Δ; et leur enveloppe est un tore (ou, mieux, plusieurs tores). Donc :

La cyclide de Dupin est la transformée d'un tore par rayons vecteurs réciproques.

Théorème de Lie.

441. Lemme I. — Soit une transformation de contact :

$$X = \varphi(x, y, z, p, q) = 0, \quad Y = \psi(x, y, z, p, q), \quad Z = \chi(x, y, z, p, q),$$

faisant correspondre, à un point $m(x, y, z)$ d'une surface s, un point M(X, Y, Z) d'une surface S. Si le point m éprouve un déplacement dx, dy, dz sur s, le point M éprouve un déplacement correspondant dX, dY, dZ sur S ; en d'autres termes, à une *direction* de déplacement mm' sur s, à partir du point m, correspond une *direction* de déplacement MM' sur S, à partir du point M, et l'on a :

$$\begin{aligned} dX = & \frac{\partial\varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial\varphi}{\partial y} dy + \frac{\partial\varphi}{\partial z}(p\,dx + q\,dy) \\ & + \frac{\partial\varphi}{\partial p}(r\,dx + s\,dy) + \frac{\partial\varphi}{\partial q}(s\,dx + t\,dy), \end{aligned}$$

$$dY = \ldots, \qquad dZ = \ldots.$$

Comme les seconds membres ne dépendent que de dx, dy, x, y, z, p, q, r, s, t, on voit que *la direction* MM' *reste la même quand, la direction* mm' *restant fixe, on substitue à la surface* s *une autre surface quelconque, ayant avec elle, en* m, *un contact du second ordre* (n° 353).

442. Lemme II. — *Si deux surfaces ont entre elles, en un point, un contact du second ordre, elles ont en ce point mêmes directions principales et asymptotiques.*

Car les directions en question ne dépendent que des valeurs de p, q, r, s, t au point considéré, en vertu des équations (12 *bis*) et (13 *bis*) du n° **428**.

443. Théorème de Lie. — *Soient deux surfaces, s et* S, *transformées l'une de l'autre par la transformation de Lie* (n° **110**) ; *à un point m de s correspond un point* M *de* S : *quand m décrit une ligne asymptotique de s,* M *décrit une ligne de courbure de* S.

Tout revient à établir que, si m se déplace, *sur* s, dans la

direction mm' d'une asymptotique, M se déplace, *sur* S, dans la direction MM' d'une ligne de courbure.

Or, soient σ une surface particulière quelconque ayant avec s un contact du second ordre au point m, et Σ sa transformée par la transformation de Lie; les deux surfaces S et Σ ont entre elles, en M, un contact du second ordre, puisque les contacts des divers ordres sont conservés par la transformation (n° **354**). En vertu des lemmes I et II, il suffit, pour démontrer le théorème de Lie, d'établir que si m se déplace, *sur* σ, dans la direction, mm', d'une ligne asymptotique, M se déplace, *sur* Σ, dans la direction, MM', d'une ligne de courbure de Σ.

On peut choisir pour σ une surface du second ordre, à deux séries de génératrices rectilignes, réelles ou imaginaires : en effet, si l'on prend le point m pour origine, avec des plans de coordonnées convenables, l'équation de la surface s s'écrit (n° **419**)

$$z = \frac{1}{2}(Mx^2 + Ny^2) + \ldots,$$

et le paraboloïde elliptique ou hyperbolique

$$z = \frac{1}{2}(Mx^2 + Ny^2)$$

a un contact du second ordre à l'origine avec s, puisqu'on a, en ce point, pour les deux surfaces,

$$p = q = 0, \qquad r = M, \qquad s = 0, \qquad t = N.$$

Ce paraboloïde étant pris pour σ, la surface Σ sera (n° **112**) une cyclide de Dupin, Σ; lorsque le point m décrit une génératrice rectiligne de σ, les *éléments* (m, ϖ) correspondants sont les éléments communs à σ et à la droite; les éléments transformés (M, Π) sont donc communs à Σ et à une des sphères inscrites (n° **112**), c'est-à-dire que M décrit le cercle de contact de Σ et d'une sphère. C'est là ce qu'il s'agissait d'établir, puisque, sur σ, une génératrice rectiligne est ligne asymptotique (n° **435**), et que, sur Σ, un cercle de contact est ligne de courbure (n° **438**).

Les problèmes de la recherche des lignes de courbure et des lignes asymptotiques sont ainsi ramenés l'un à l'autre : si l'on sait trouver les lignes asymptotiques d'une surface on saura trouver les lignes de courbure d'une autre surface, et réciproquement.

Théorème de Dupin.

444. Définition. — Une famille simplement infinie de surfaces étant représentée par une équation de la forme $f(x, y, z, \lambda) = 0$, on peut résoudre cette relation par rapport au paramètre λ, ce qui donne

$$\lambda = F(x, y, z), \tag{1}$$

autre forme de l'équation de la famille.

Soit une autre famille simplement infinie

$$\mu = \Phi(x, y, z); \tag{2}$$

cherchons à quelles conditions une surface (1) quelconque coupera à angle droit, *tout le long de son intersection avec elle,* une surface (2) quelconque.

Soit x, y, z un point commun à la surface (1) et à la surface (2), la condition d'orthogonalité des plans tangents en ce point est

$$\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial \Phi}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial \Phi}{\partial z} = 0, \tag{3}$$

équation qui doit être vérifiée pour toutes les valeurs de x, y, z qui satisfont à (1) et à (2), et cela *quels que soient* λ *et* μ. En d'autres termes, l'équation (3) doit être vérifiée pour toutes les valeurs de x, y, z, λ et μ qui satisfont à (1) et (2); c'est-à-dire qu'en tirant λ et μ de (1) et (2), et portant dans (3), on devra obtenir une identité en x, y, z. Mais précisément l'équation (3) ne contient ni λ, ni μ : elle devra donc être une identité en x, y, z.

Cela posé, on dit que trois systèmes de surfaces,

$$\lambda = F(x, y, z), \qquad \mu = \Phi(x, y, z), \qquad \nu = \Psi(x, y, z), \tag{4}$$

forment un *système triple orthogonal,* si toute surface de chacune des familles coupe partout à angle droit toutes les surfaces des deux autres familles.

D'après ce qui précède, il en sera ainsi si l'on a identiquement,

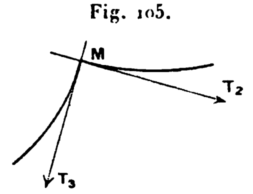
quels que soient x, y, z,

$$(5)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x}\dfrac{\partial \Phi}{\partial x}+\dfrac{\partial F}{\partial y}\dfrac{\partial \Phi}{\partial y}+\dfrac{\partial F}{\partial z}\dfrac{\partial \Phi}{\partial z}=0, \\ \dfrac{\partial \Phi}{\partial x}\dfrac{\partial \Psi}{\partial x}+\dfrac{\partial \Phi}{\partial y}\dfrac{\partial \Psi}{\partial y}+\dfrac{\partial \Phi}{\partial z}\dfrac{\partial \Psi}{\partial z}=0, \\ \dfrac{\partial \Psi}{\partial x}\dfrac{\partial F}{\partial x}+\dfrac{\partial \Psi}{\partial y}\dfrac{\partial F}{\partial y}+\dfrac{\partial \Psi}{\partial z}\dfrac{\partial F}{\partial z}=0. \end{cases}$$

445. **Théorème de Dupin.** — *Les trois familles de surfaces d'un système triple orthogonal se coupent mutuellement suivant leurs lignes de courbure.*

Pour le démontrer, considérons un point quelconque M, d'une surface I de la première famille ; les surfaces II et III, des deuxième et troisième familles, qui passent par M coupent la proposée I suivant deux courbes, qui ont respectivement pour tangentes en M

Fig. 105.



les droites MT_2 et MT_3 (*fig.* 105); tout revient à établir que MT_2 et MT_3 sont les directions principales de la surface I, au point M.

A cet effet, supposons l'origine de coordonnées transportée en M ; prenons pour plans des xy, des yz et des zx les plans tangents en M aux surfaces I, II et III, respectivement : ces trois plans sont deux à deux rectangulaires, par hypothèse, et les axes des x et des y sont les droites MT_3 et MT_2.

Après ce changement, soient

$$\lambda_0 = F(x, y, z), \qquad \mu_0 = \Phi(x, y, z), \qquad \nu_0 = \Psi(x, y, z)$$

les équations des surfaces I, II et III : les F, Φ et Ψ ne sont pas les mêmes que précédemment, mais les identités (5) ont toujours lieu entre les dérivées partielles de ces nouvelles fonctions.

Cherchons les directions principales de la surface I, à l'origine, et pour cela développons $F(x, y, z) - \lambda_0$, suivant les puissances

croissantes de x, y, z, par la formule de Maclaurin. Il vient, en remarquant que le terme constant est nul, puisque la surface $F - \lambda_0 = 0$ passe par l'origine,

$$F(x, y, z) - \lambda_0 = x\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_0 + y\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_0 + z\left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)_0 + \frac{1}{2}x^2\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\right)_0 + xy\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial y}\right)_0 + \frac{1}{2}y^2\left(\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\right)_0 + xz\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial z}\right)_0 + \ldots$$

Or, à l'origine, $\frac{\partial F}{\partial x}$ et $\frac{\partial F}{\partial y}$ sont nuls, puisque le plan tangent à la surface I est le plan des xy; $\left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)_0$, au contraire, est $\gtrless 0$, sinon l'origine serait un point singulier de la surface I, cas exceptionnel que nous écartons. Il reste alors, pour équation de cette surface, en n'écrivant que les termes principaux,

$$0 = z\left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)_0 + \frac{1}{2}x^2\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\right)_0 + xy\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial y}\right)_0 + \frac{1}{2}y^2\left(\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\right)_0 + \ldots,$$

les termes non écrits étant négligeables, quand x, y, z sont très petits, devant l'un ou l'autre des termes écrits.

Les axes de l'indicatrice à l'origine sont donc, en direction, ceux de la conique du plan des xy,

$$x^2\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\right)_0 + 2xy\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial y}\right)_0 + y^2\left(\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\right)_0 = 1,$$

et l'on aura démontré qu'ils coïncident avec les axes des x et des y (directions MT_3 et MT_2) si l'on prouve que le coefficient du terme en xy est nul.

Tout se réduit donc à établir que

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial y} = 0,$$

pour $x = y = z = 0$.

Faisons appel pour cela aux identités (5), en observant d'abord que, d'après le choix des plans de coordonnées, on a

$$(6)\qquad \frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial y} = 0,$$

$$(7)\qquad \frac{\partial \Phi}{\partial y} = \frac{\partial \Phi}{\partial z} = 0,$$

$$(8)\qquad \frac{\partial \Psi}{\partial z} = \frac{\partial \Psi}{\partial x} = 0,$$

pour $x = y = z = 0$; et aussi

$$\frac{\partial F}{\partial z} \gtrless 0, \qquad \frac{\partial \Phi}{\partial x} \gtrless 0, \qquad \frac{\partial \Psi}{\partial y} \gtrless 0,$$

si l'on admet que l'origine est un point ordinaire pour les surfaces I, II et III. Cela posé, dérivons la première identité (5) par rapport à y, et faisons dans le résultat $x = y = z = 0$; il vient, en tenant compte de (6) et (7),

$$(9) \qquad \frac{\partial^2 F}{\partial x\, \partial y} \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y\, \partial z} \frac{\partial F}{\partial z} = 0,$$

pour $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$.

De même, en dérivant la seconde identité (5) par rapport à z, et la troisième par rapport à x, on obtient

$$(10) \qquad \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y\, \partial z} \frac{\partial \Psi}{\partial y} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x\, \partial z} \frac{\partial \Phi}{\partial x} = 0,$$

$$(11) \qquad \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x\, \partial z} \frac{\partial F}{\partial z} + \frac{\partial^2 F}{\partial x\, \partial y} \frac{\partial \Psi}{\partial y} = 0,$$

pour $x = y = z = 0$.

Les trois équations (9), (10) et (11) sont linéaires et homogènes en $\frac{\partial^2 F}{\partial x\, \partial y}$, $\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y\, \partial z}$, $\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x\, \partial z}$; le déterminant de ces quantités n'est pas nul, car il est égal à $2 \frac{\partial F}{\partial z} \frac{\partial \Phi}{\partial x} \frac{\partial \Psi}{\partial y}$ (pour $x = y = z = 0$), produit dont aucun facteur n'est nul, comme on l'a vu. Donc les trois quantités $\frac{\partial^2 F}{\partial x\, \partial y}$, $\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y\, \partial z}$, $\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x\, \partial z}$ sont nulles pour $x = y = z = 0$, et l'évanouissement de la première démontre le théorème.

446. Exemple. — *Quadriques homofocales.* — Considérons les surfaces, dites *homofocales,* représentées par l'équation

$$(12) \qquad \frac{x^2}{a^2 - \lambda} + \frac{y^2}{b^2 - \lambda} + \frac{z^2}{c^2 - \lambda} = 1 \qquad (a^2 > b^2 > c^2).$$

Par un point de l'espace (x_0, y_0, z_0) passent trois de ces surfaces; les valeurs de λ correspondantes sont les racines de l'équation

$$(13) \qquad \frac{x_0^2}{a^2 - \lambda} + \frac{y_0^2}{b^2 - \lambda} + \frac{z_0^2}{c^2 - \lambda} - 1 = 0.$$

Ces trois racines sont réelles, et comprises respectivement entre $-\infty$ et c^2, c^2 et b^2, b^2 et a^2; il suffit, pour le voir, de substituer à λ, dans le premier membre de (13), les valeurs $-\infty$, $c^2-\varepsilon$, $c^2+\varepsilon$, $b^2-\varepsilon$, $b^2+\varepsilon$, $a^2-\varepsilon$.

En d'autres termes, par un point quelconque de l'espace passent trois quadriques réelles du système (12); l'une est un ellipsoïde, l'autre un hyperboloïde à une nappe, la dernière un hyperboloïde à deux nappes.

On a ainsi trois familles de surfaces représentées par la même équation (12), à savoir les ellipsoïdes et les deux espèces d'hyperboloïdes; je dis que *ces surfaces forment un système triple orthogonal.*

Soient, en effet,

$$(14)\qquad \begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2-\lambda}+\dfrac{y^2}{b^2-\lambda}+\dfrac{z^2}{c^2-\lambda}-1=0, \\ \dfrac{x^2}{a^2-\mu}+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots=0 \end{cases}$$

deux d'entre elles; les coefficients de leurs plans tangents en un point commun x, y, z sont $\dfrac{x}{a^2-\lambda}$, $\dfrac{y}{b^2-\lambda}$, $\dfrac{z}{c^2-\lambda}$; $\dfrac{x}{a^2-\mu}$, ..., et il faut prouver que l'on a

$$(15)\qquad \frac{x^2}{(a^2-\lambda)(a^2-\mu)}+\frac{y^2}{(b^2-\lambda)(b^2-\mu)}+\frac{z^2}{(c^2-\lambda)(c^2-\mu)}=0$$

pour toutes les valeurs de x, y, z qui vérifient les deux relations (14). Or, en retranchant ces deux relations membre à membre, et divisant par $\lambda-\mu$, on trouve précisément l'équation (15).

Donc, par le théorème de Dupin :

Les lignes de courbure d'une quadrique à centre sont ses intersections par les quadriques homofocales.

Ces lignes sont donc algébriques.

447. Coordonnées elliptiques sur l'ellipsoïde. — Soit l'ellipsoïde (E),

$$(16)\qquad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1=0;$$

les valeurs de λ qui correspondent aux trois surfaces homofocales passant par un point x, y, z de cet ellipsoïde sont les racines de l'équation

$$\frac{x^2}{a^2-\lambda}+\frac{y^2}{b^2-\lambda}+\frac{z^2}{c^2-\lambda}-1=0,$$

ou

$$\begin{aligned}\lambda^3+\lambda^2(x^2+y^2+z^2-a^2-b^2-c^2)\\ -\lambda[(b^2+c^2)x^2+(c^2+a^2)y^2+(a^2+b^2)z^2-b^2c^2-c^2a^2-a^2b^2]\\ +b^2c^2x^2+c^2a^2y^2+a^2b^2z^2-a^2b^2c^2=0.\end{aligned}$$

Le terme indépendant de λ est nul en vertu de (16), d'où la racine $\lambda=0$, évidente *a priori*, qui correspond à l'ellipsoïde (E) lui-même; les deux autres valeurs de λ vérifient l'équation

$$\begin{aligned}\lambda^2+\lambda(x^2+y^2+z^2-a^2-b^2-c^2)\\ -(b^2+c^2)x^2-(c^2+a^2)y^2-(a^2+b^2)z^2+b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2=0.\end{aligned}$$

Désignons-les par u et v; nous avons

$$\begin{aligned}-(u+v)&=x^2+y^2+z^2-a^2-b^2-c^2,\\ -\quad uv&=(b^2+c^2)x^2+(c^2+a^2)y^2+(a^2+b^2)z^2-b^2c^2-c^2a^2-a^2b^2,\end{aligned}$$

et, en joignant à ces deux équations l'équation (16), nous pouvons exprimer linéairement x^2, y^2 et z^2 en fonction de $u+v$ et de uv, sous la forme

$$\begin{aligned}x^2&=\frac{a^2(a^2-u)(a^2-v)}{(a^2-b^2)(a^2-c^2)},\\ y^2&=\frac{b^2(b^2-u)(b^2-v)}{(b^2-c^2)(b^2-a^2)},\\ z^2&=\frac{c^2(c^2-u)(c^2-v)}{(c^2-a^2)(c^2-b^2)}.\end{aligned}$$

C'est une expression paramétrique pour les coordonnées d'un point quelconque de l'ellipsoïde (E); les équations $u=$ const. et $v=$ const. représentent les intersections de cet ellipsoïde avec des hyperboloïdes homofocaux; ce sont donc les équations des lignes de courbure de (E).

On en déduit, sur l'ellipsoïde, le carré de l'élément d'arc, sous la forme

$$\begin{aligned}ds^2=dx^2+dy^2+dz^2=\ &\frac{1}{4}\frac{u(u-v)}{(a^2-u)(b^2-u)(c^2-u)}du^2\\ &+\frac{1}{4}\frac{v(v-u)}{(a^2-v)(b^2-v)(c^2-v)}dv^2,\end{aligned}$$

ce qui peut s'écrire

$$(17)\quad ds^2 = \frac{1}{4}(u-v)\left[\frac{u\,du^2}{(a^2-u)(b^2-u)(c^2-u)} - \frac{v\,dv^2}{(a^2-v)(b^2-v)(c^2-v)}\right].$$

Surfaces minima.

448. On nomme *surfaces minima* celles dont les lignes asymptotiques se coupent partout à angle droit, ou, sous une autre forme évidemment équivalente, celles qui ont pour indicatrice, *en chaque point,* une hyperbole équilatère. Leur nom se rattache à cette propriété que, parmi les surfaces limitées à une courbe gauche fermée, celle dont l'aire est minimum est une surface minima.

Si l'indicatrice est une hyperbole équilatère, les rayons de courbure principaux sont (n° **421**) égaux et de signe contraire : pour exprimer qu'une surface $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$, $z = z(u, v)$ est minima, il faudra donc écrire que l'équation (9) du n° **427**, aux rayons de courbure principaux, manque du terme en ρ, c'est-à-dire que l'on a

$$(18)\qquad 2FS - ET - GR = 0,$$

quels que soient les deux paramètres u et v.

Par exemple, pour la surface de vis à filet carré, R et T sont nuls, F l'est également; car, dans les valeurs de R, T, F données au n° **433** pour l'hélicoïde général, on doit faire $f(r) = 0$. *La surface de vis à filet carré est donc une surface minima.*

Si la surface est donnée sous la forme $z = f(x, y)$, l'équation (18) devient, en remplaçant E, ..., R, ... par leurs valeurs (n° **428**),

$$(19)\qquad (1+p^2)t - 2pqs + (1+q^2)r = 0.$$

Le problème de trouver toutes les surfaces minima revient à déterminer toutes les fonctions z, de x et y, dont les dérivées partielles, premières et secondes, vérifient cette équation : il faut donc, en d'autres termes, intégrer l'équation différentielle (19); Monge l'a fait le premier, et de nombreux résultats ont été obtenus depuis sur les surfaces minima.

449. Exemple. — Cherchons à déterminer les *surfaces minima de révolution*. Pour la surface de révolution (n° 416)

$$x = r\cos\omega, \qquad y = r\sin\omega, \qquad z = f(r),$$

les valeurs de E, F, G sont $1+f'^2(r)$, 0, r^2; les valeurs proportionnelles de R, S, T sont $rf''(r)$, 0, $r^2 f'(r)$ (nos 433 et 434). Donc, si la surface est minima, on a, par (18),

$$[1+f'^2(r)]r^2 f'(r) + r^3 f''(r) = 0,$$

équation différentielle d'où il faut tirer la fonction inconnue $f(r)$.

On peut écrire, en séparant les variables f et r,

$$\frac{f''}{f'(1+f'^2)} = -\frac{1}{r},$$

d'où, en décomposant $\frac{1}{f'(1+f'^2)}$ en éléments simples,

$$\frac{f''}{f'} - \frac{f''f'}{1+f'^2} = -\frac{1}{r},$$

et, en remontant aux primitives,

$$\log f' - \frac{1}{2}\log(1+f'^2) = -\log r + \log c,$$

c'est-à-dire

$$\frac{f'}{\sqrt{1+f'^2}} = \frac{c}{r}.$$

On en tire

$$f' = \frac{c}{\sqrt{r^2-c^2}},$$

et, en intégrant encore une fois,

$$f = c\log\left(r+\sqrt{r^2-c^2}\right) + c'.$$

La méridienne, dans le plan zOx, c'est-à-dire la courbe $z=f(x)$, est donc

$$z = c\log\left(x+\sqrt{x^2-c^2}\right) + c'.$$

La valeur de la constante c' n'influe pas sur la forme de la surface de révolution : car changer c' revient à déplacer la méridienne parallèlement à Oz (*fig.* 106), axe de la surface. On peut donc

supposer $c' = -c\log c$, ce qui donne pour la méridienne

$$z = c\log\frac{x+\sqrt{x^2-c^2}}{c},$$

ou

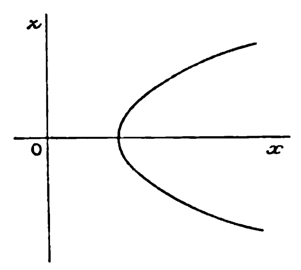
$$x+\sqrt{x^2-c^2} = ce^{\frac{z}{c}};$$

on en déduit

$$x = \frac{c}{2}\left(e^{\frac{z}{c}} + e^{-\frac{z}{c}}\right).$$

Cette courbe est une chaînette (n° **290**, 2°) dont l'axe de z est

Fig. 106.



la base. Ainsi *la surface minima de révolution est engendrée par une chaînette, tournant autour de sa base.*

Surface dont tous les points sont des ombilics.

450. Pour une telle surface, les équations qui donnent les ombilics se réduisent à des identités; en supposant la surface représentée par $z = f(x, y)$, on aura donc, par l'équation (15 *bis*) du n° **428**,

$$\frac{1+p^2}{r} = \frac{pq}{s} = \frac{1+q^2}{t},$$

quels que soient x et y. On peut écrire

$$\frac{pr}{1+p^2} = \frac{s}{q} \quad \text{et} \quad \frac{qt}{1+q^2} = \frac{s}{p}.$$

Dans la première équation, les deux membres sont les dérivées, *par rapport à* x, de $\frac{1}{2}\log(1+p^2)$ et de $\log q$; donc, en remontant

aux primitives, et introduisant une constante, $\frac{1}{2}\log Y$, *fonction de y seul,*

$$1+p^2 = Yq^2;$$

de même on aura, par la seconde équation,

$$1+q^2 = Xp^2,$$

X et Y étant des fonctions respectivement de x et de y.

On en tire les valeurs de p et de q :

$$p^2 = \frac{Y+1}{XY-1}, \qquad q^2 = \frac{X+1}{XY-1};$$

mais, p et q étant les dérivées partielles de z par rapport à x et y, on doit avoir $\frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial q}{\partial x}$, c'est-à-dire, comme on le trouve aisément,

$$\frac{(X+1)Y'}{\sqrt{Y+1}} = \frac{(Y+1)X'}{\sqrt{X+1}},$$

ou

$$\frac{X'}{(X+1)^{\frac{3}{2}}} = \frac{Y'}{(Y+1)^{\frac{3}{2}}}.$$

Or, x et y étant deux variables *indépendantes,* une fonction de x ne peut être égale à une fonction de y que si ces deux fonctions se réduisent à une même constante, $-2a$.

On a donc

$$\frac{X'}{(X+1)^{\frac{3}{2}}} = -2a, \qquad \frac{Y'}{(Y+1)^{\frac{3}{2}}} = -2a.$$

Remontons aux primitives, nous obtenons

$$\frac{1}{\sqrt{X+1}} = a(x-x_0), \qquad \frac{1}{\sqrt{Y+1}} = a(y-y_0),$$

x_0 et y_0 étant des constantes *absolues.* On tire de là X et Y, et, en portant leurs valeurs dans les expressions de p^2 et de q^2, on trouve :

$$p^2 = \frac{Y+1}{XY-1} = \frac{a^2(x-x_0)^2}{1-a^2(x-x_0)^2-a^2(y-y_0)^2},$$

c'est-à-dire

$$p = \frac{a(x-x_0)}{\sqrt{1-a^2(x-x_0)^2-a^2(y-y_0)^2}};$$

de même,

$$q = \frac{a(y-y_0)}{\sqrt{1-a^2(x-x_0)^2-a^2(y-y_0)^2}}.$$

La fonction z, qui a pour dérivées partielles p et q, est évidemment, z_0 désignant une constante absolue,

$$z = z_0 - \frac{1}{a}\sqrt{1-a^2(x-x_0)^2-a^2(y-y_0)^2},$$

et cette équation représente une sphère générale.

La sphère, avec sa variété, le plan, est donc la seule surface dont tous les points soient des ombilics, c'est-à-dire dont les lignes de courbure soient indéterminées.

IV. — DÉVELOPPÉE D'UNE SURFACE.

---

451. **Lignes géodésiques.** — On nomme *géodésiques* les lignes tracées sur une surface et dont le plan osculateur en chaque point contient la normale à la surface en ce point. On apprendra, dans le Cours de seconde année, à former leur équation différentielle, et l'on verra que ces lignes sont en nombre doublement infini, c'est-à-dire dépendent de deux paramètres arbitraires.

Sur la *sphère,* les grands cercles sont évidemment des géodésiques, et il n'y en a pas d'autres; car, s'il existait une géodésique différente, ses plans osculateurs, qui, d'après la définition même, doivent passer par le centre O de la sphère, envelopperaient un cône, et la géodésique, qui est l'arête de rebroussement de cette enveloppe, se réduirait au point O, résultat absurde.

452. **Développée d'une surface.** — On a désigné (n° 370) sous le nom de *développée d'une surface,* S, la surface focale de la congruence des droites normales à S; chaque normale touche la développée Σ en deux points qui sont les points focaux et qui coïncident (n° 423) avec les centres de courbure principaux de S pour le pied M de la normale; les deux plans focaux c'est-à-dire les plans tangents de la développée aux deux points focaux, sont les plans principaux de S au point M (*ibid.*). La développée Σ

peut donc être définie aussi comme le lieu des centres de courbure principaux ou l'enveloppe des plans principaux de S.

Les normales menées à S le long d'une ligne de courbure forment (nº 431) une surface développable (Δ); elles touchent donc une courbe (γ), arête de rebroussement de (Δ). Le point de contact avec (γ) d'une des normales considérées est (nº 386) le point de concours limite de cette normale et de la tangente voisine menée à (γ), tangente qui est aussi une normale de S; c'est donc (nº 369) un des points focaux de la normale proposée, et il est dès lors sur Σ, c'est-à-dire que la courbe (γ) est sur la développée.

En considérant ainsi les deux systèmes de lignes de courbure de S, on obtient, sur la développée Σ, deux systèmes, simplement infinis chacun, de courbes (γ), que nous désignerons respectivement par (γ_1) et (γ_2); toute tangente à l'une de ces courbes est une normale de S; réciproquement, toute normale ν de S touche une courbe (γ_1) et une courbe (γ_2), les points de contact c_1 et c_2 étant les deux centres de courbure principaux de S pour le pied de la normale.

Cela posé, observons que les plans focaux relatifs à la normale ν sont (nº 369) ceux qui passent par ν et par chacune des deux normales voisines, rencontrant ν au second ordre près : ce sont donc les plans passant par ν et par chacune des deux tangentes, voisines de ν, menées aux courbes (γ_1) et (γ_2) que touche ν, puisque ces deux tangentes sont des normales de S et coupent ν au second ordre près (nº 386). En d'autres termes, les deux plans focaux relatifs à ν sont les plans osculateurs en c_1 et c_2 aux courbes (γ_1) et (γ_2) considérées, et de telle sorte (nº 369) que le plan osculateur à (γ_1) au point c_1 touche la surface focale Σ en c_2, et que le plan osculateur à (γ_2) en c_2 touche Σ en c_1.

Or, les deux plans focaux étant rectangulaires, puisque ce sont les plans principaux de S pour le pied de la normale ν, il résulte de là que le plan osculateur à la courbe (γ_1) au point c_1 est perpendiculaire au plan qui touche Σ au même point; en d'autres termes :

Les lignes (γ_1) *et* (γ_2) *sont des géodésiques de la développée* Σ.

453. Applications. — Ces considérations, et les résultats antérieurs, permettent de traiter quelques questions intéressantes.

1° *Une surface Σ, prise au hasard, n'est pas, à elle seule, la développée d'une surface;* tandis que le théorème analogue est vrai pour les courbes.

Car les normales à la surface cherchée seraient des droites touchant Σ en deux points, c'est-à-dire des *bitangentes* de Σ. Or, les bitangentes de Σ forment une ou plusieurs congruences distinctes, puisqu'elles sont évidemment en nombre doublement infini; pour qu'une de ces congruences soit une congruence de normales, il faut et il suffit (n° 370) que les deux plans focaux relatifs à chaque bitangente de la congruence soient rectangulaires. Sous une autre forme, si a et b sont les points de contact d'une des bitangentes et de Σ, les plans tangents à Σ en a et b doivent être à angle droit; cette condition n'est évidemment pas réalisée pour une surface Σ prise au hasard, ce qui établit la proposition.

2° *Une surface Σ, prise au hasard, peut être combinée avec une autre surface Σ' convenablement choisie, de manière que l'ensemble des deux surfaces Σ et Σ' soit la développée d'une surface.*

Prenons, en effet, sur Σ, une série simplement infinie quelconque de lignes géodésiques, et considérons l'ensemble de leurs tangentes; ces tangentes, en nombre doublement infini, forment une congruence de droites, et je dis que c'est une congruence de normales, c'est-à-dire (n° 370) que les deux plans focaux relatifs à chacune d'elles sont rectangulaires.

Soit, en effet, c_1 un point d'une des géodésiques (γ_1); désignons par ν la tangente à (γ_1) en ce point; un des deux plans focaux relatifs à ν est évidemment le plan tangent à Σ en c_1, car la surface Σ, touchée par toutes les droites ν, est une partie de leur surface focale. L'autre plan focal, en vertu d'un raisonnement fait au numéro précédent, est le plan osculateur à la courbe (γ_1) au point c_1 : les deux plans focaux sont bien rectangulaires, puisque le plan osculateur en c_1 à la *géodésique* (γ_1) est normal en ce même point à la surface Σ.

Les tangentes aux géodésiques considérées forment donc bien

une congruence de normales; leur surface focale se compose de la surface Σ et d'une autre surface Σ', ce qui démontre le théorème.

Exemple. — Prenons pour Σ une sphère de centre O; une série simplement infinie quelconque de grands cercles géodésiques sera découpée sur Σ par les plans qui enveloppent un cône quelconque Σ', de sommet O. Les tangentes à ces grands cercles touchent toutes le cône Σ', qui, dès lors, forme, avec Σ, la surface focale de leur congruence. Donc l'ensemble d'une sphère et d'un cône concentriques constitue la développée d'une surface, dont les normales sont les tangentes aux grands cercles déterminés dans la sphère par les plans qui touchent le cône.

CHAPITRE VI.

REPRÉSENTATION DES SURFACES LES UNES SUR LES AUTRES.

---

454. Définitions et objet du Chapitre. — On dit qu'une surface Σ est *représentée* sur une surface Σ_1 lorsqu'on a établi entre leurs points une correspondance, telle qu'à un point de l'une des surfaces correspondent un ou plusieurs points de l'autre : à une courbe tracée sur Σ correspond ainsi une courbe tracée sur Σ_1, et réciproquement.

Il est clair qu'on peut représenter Σ sur Σ_1 d'une infinité de manières; par exemple, en faisant correspondre les points des deux surfaces situées sur une même parallèle à Oz, etc. Parmi les représentations d'une surface sur une autre, les suivantes sont particulièrement intéressantes :

1° *La représentation peut conserver les longueurs,* c'est-à-dire que la longueur d'un arc quelconque tracé sur Σ est égale à celle de l'arc correspondant de Σ_1 ; on dit alors que les deux surfaces sont *applicables l'une sur l'autre;*

2° *La représentation peut conserver les angles,* c'est-à-dire que l'angle de deux courbes tracées sur Σ est égal à l'angle des deux courbes correspondantes de Σ_1 ; on dit alors que la représentation est *conforme*. Lorsque Σ_1 est un plan, c'est le problème des *cartes géographiques*.

On va étudier successivement ces deux modes de représentation.

I. — SURFACES APPLICABLES L'UNE SUR L'AUTRE.

---

455. Soient Σ et Σ_1 deux surfaces, définies respectivement par les équations paramétriques

$$(\Sigma) \qquad x = x(u, v), \qquad y = y(u, v), \qquad z = z(u, v),$$

$$(\Sigma_1) \qquad x = x_1(u', v'), \qquad y = y_1(u', v'), \qquad z = z_1(u', v').$$

Établir entre leurs points une correspondance, c'est faire correspondre à un système de valeurs de u, v un système de valeurs de u', v'; c'est donc poser

$$(1) \qquad u' = f(u, v), \qquad v' = g(u, v),$$

f et g étant des fonctions quelconques.

Cela posé, sur la surface (Σ), le carré de l'élément d'arc a pour expression (n° 412) :

$$(2) \qquad ds^2 = E(u, v)\,du^2 + 2F(u, v)\,du\,dv + G(u, v)\,dv^2,$$

et sur (Σ_1) :

$$(3) \qquad ds_1^2 = E_1(u', v')\,du'^2 + 2F_1(u', v')\,du'\,dv' + G_1(u', v')\,dv'^2.$$

Pour que les deux surfaces soient applicables l'une sur l'autre, il est *nécessaire* que les arcs infiniment petits *correspondants* soient égaux; or, le carré de l'élément ds_1, qui correspond sur Σ_1 à l'élément ds pris sur Σ, s'obtient en remplaçant, dans (3), u' et v' par leurs valeurs (1) en fonction de u et v, ce qui donne

$$\begin{aligned} ds_1^2 = {} & E_1(f, g)\left(\frac{\partial f}{\partial u}du + \frac{\partial f}{\partial v}dv\right)^2 + G_1(f, g)\left(\frac{\partial g}{\partial u}du + \frac{\partial g}{\partial v}dv\right)^2 \\ & + 2F_1(f, g)\left(\frac{\partial f}{\partial u}du + \frac{\partial f}{\partial v}dv\right)\left(\frac{\partial g}{\partial u}du + \frac{\partial g}{\partial v}dv\right), \end{aligned}$$

ou, en ordonnant par rapport à du et dv,

$$ds_1^2 = \mathcal{E}\,du^2 + 2\mathcal{F}\,du\,dv + \mathcal{G}\,dv^2;$$

étant posé, pour simplifier,

$$(4) \qquad \left\{ \begin{aligned} \mathcal{E} &= E_1(f, g)\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)^2 + 2F_1(f, g)\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial g}{\partial u} + G_1(f, g)\left(\frac{\partial g}{\partial u}\right)^2, \\ \mathcal{F} &= E_1(f, g)\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial f}{\partial v} + F_1(f, g)\left(\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial g}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial g}{\partial u}\right) + G_1(f, g)\frac{\partial g}{\partial u}\frac{\partial g}{\partial v}, \\ \mathcal{G} &= E_1(f, g)\left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)^2 + 2F_1(f, g)\frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial g}{\partial v} + G_1(f, g)\left(\frac{\partial g}{\partial v}\right)^2. \end{aligned} \right.$$

Pour que $ds_1^2 = ds^2$, quelle que soit la position de l'arc ds, il faut que l'on ait

$$E(u, v)\,du^2 + 2F(u, v)\,du\,dv + G(u, v)\,dv^2 = \mathcal{E}\,du^2 + 2\mathcal{F}\,du\,dv + \mathcal{G}\,dv^2,$$

quels que soient du, dv, u, v; c'est-à-dire qu'on doit avoir *iden-*

tiquement (quels que soient u et v),

$$(5) \qquad E = \mathcal{E}, \quad F = \mathcal{F}, \quad G = \mathcal{G}.$$

Ces conditions, *nécessaires* pour que Σ_1 soit applicable sur Σ, sont *suffisantes :* car, si elles sont remplies, les arcs infiniment petits correspondants de deux courbes correspondantes sont égaux, et il en est de même des arcs finis, puisque la relation $ds_1 = ds$ entraîne évidemment $s_1 = s$, les deux arcs correspondants s_1 et s étant nuls en même temps.

Donc enfin, pour reconnaître si Σ_1 est applicable sur Σ, il faut voir si l'on peut déterminer les deux fonctions inconnues

$$f(u, v) \quad \text{et} \quad g(u, v),$$

qui définissent la correspondance, de manière que les relations (5) soient satisfaites. Or E, F, G sont des fonctions connues de u et v; $\mathcal{E}$, $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$ sont, d'après (4), des fonctions de forme connue de f, g et de leurs dérivées partielles du premier ordre en u, v : les relations (5) sont donc *trois* équations différentielles, aux dérivées partielles, par rapport aux *deux* fonctions cherchées f et g. On a donc une équation de plus qu'il n'y a d'inconnues, c'est-à-dire que le problème est généralement impossible, ou que deux surfaces prises au hasard ne sont pas applicables l'une sur l'autre.

Remarque. — Si Σ et Σ_1 sont applicables l'une sur l'autre, on aura, d'après cela, pour les définir paramétriquement,

$$(\Sigma) \qquad x = x(u, v), \quad y = y(u, v), \quad z = z(u, v);$$

$$(\Sigma_1) \quad x = x_1(f, g) = X(u, v), \quad y = Y(u, v), \quad z = Z(u, v).$$

Au point (u, v) de Σ correspondra, sur Σ_1, le point de mêmes arguments u et v, et cette correspondance sera telle qu'on ait :

$$ds^2 = E(u, v)\,du^2 + 2F(u, v)\,du\,dv + G(u, v)\,dv^2,$$

$$ds_1^2 = E(u, v)\,du^2 + 2F(u, v)\,du\,dv + G(u, v)\,dv^2,$$

c'est-à-dire

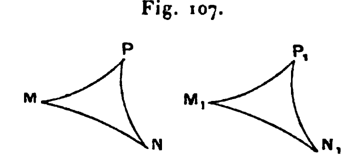
$$ds^2 \equiv ds_1^2$$

identiquement.

Réciproquement, si $ds^2 \equiv ds_1^2$, les deux surfaces sont applicables l'une sur l'autre, de telle sorte qu'au point (u, v) sur Σ corresponde le point de mêmes arguments (u, v) sur Σ_1.

456. Si Σ est applicable sur Σ_1, les arcs correspondants sont égaux; il en résulte que les *angles sont aussi conservés,* c'est-à-dire que l'angle de deux courbes de Σ est égal à celui des courbes correspondantes de Σ_1. Car, soient M et M_1 (*fig.* 107) les sommets des deux angles; prenons sur chaque côté de l'angle M deux points, N et P, infiniment voisins de M, et joignons-les par un arc quelconque NP. Soient N_1 et P_1 les points correspondants sur Σ_1

Fig. 107.



et N_1P_1 l'arc correspondant à NP. Les deux triangles MNP, $M_1N_1P_1$, qui sont rectilignes à la limite, ont leurs côtés égaux chacun à chacun, puisque ces côtés sont des arcs correspondants de Σ et de Σ_1; leurs angles sont donc aussi égaux. C. Q. F. D.

Exemples de surfaces applicables l'une sur l'autre.

457. Théorème de Bour. — *Tout hélicoïde est applicable sur une surface de révolution.*

Soit l'hélicoïde Σ_1 :

$$(\Sigma_1) \qquad x = r\cos\omega, \qquad y = r\sin\omega, \qquad z = f(r) + a\omega.$$

On a

$$ds_1^2 = [1 + f'^2(r)]\,dr^2 + 2af'(r)\,dr\,d\omega + (r^2 + a^2)\,d\omega^2.$$

Cherchons s'il existe une surface de révolution Σ (n° **416**) :

$$(\Sigma) \qquad x = u\cos\theta, \qquad y = u\sin\theta, \qquad z = \varphi(u),$$

sur laquelle l'hélicoïde soit applicable. On a, sur cette surface,

$$ds^2 = u^2 d\theta^2 + [1 + \varphi'^2(u)]\,du^2.$$

Écrivons ds_1^2, en complétant le carré formé par les deux

derniers termes :

$$ds_1^2 = (r^2 + a^2)\left[d\omega + a\frac{f'(r)}{r^2+a^2}\,dr\right]^2 + dr^2\frac{a^2 + r^2[1+f'^2(r)]}{r^2+a^2}.$$

Établissons maintenant, entre les deux surfaces Σ et Σ_1, la correspondance définie par les équations

$$(6)\qquad \theta = \omega + a\int\frac{f'(r)}{r^2+a^2}\,dr, \qquad u = \sqrt{r^2+a^2},$$

d'où l'on tire

$$r = \sqrt{u^2-a^2}, \qquad dr = \frac{u\,du}{\sqrt{u^2-a^2}}.$$

On peut écrire, en remplaçant r et dr par ces valeurs,

$$\begin{aligned} ds_1^2 &= u^2 d\theta^2 + du^2\frac{a^2 + (u^2-a^2)\left[1+f'^2\left(\sqrt{u^2-a^2}\right)\right]}{u^2-a^2} \\ &= u^2 d\theta^2 + du^2\frac{u^2 + (u^2-a^2)f'^2\left(\sqrt{u^2-a^2}\right)}{u^2-a^2}, \end{aligned}$$

et l'on aura identiquement $ds_1^2 \equiv ds^2$, si l'on peut choisir la fonction inconnue, $\varphi(u)$, de manière à vérifier la relation

$$1 + \varphi'^2(u) = \frac{u^2 + (u^2-a^2)f'^2\left(\sqrt{u^2-a^2}\right)}{u^2-a^2}$$

ou

$$\varphi'^2(u) = \frac{a^2 + (u^2-a^2)f'^2\left(\sqrt{u^2-a^2}\right)}{u^2-a^2}.$$

Il suffit, pour cela, de prendre

$$(7)\qquad \varphi(u) = \int\sqrt{\frac{a^2 + (u^2-a^2)f'^2\left(\sqrt{u^2-a^2}\right)}{u^2-a^2}}\,du.$$

Le théorème est donc établi ; la surface de révolution est engendrée par la rotation, autour de Oz, de la courbe $z = \varphi(x)$ du plan des zx.

458. **Cas particuliers.** — 1° *Surface de vis à filet carré.* — On a, pour cet hélicoïde, $f(r) = 0$. Il est donc applicable sur la surface de révolution autour de Oz qui a pour méridienne, dans le plan zOx, la courbe $z = \varphi(x)$, la fonction $\varphi(x)$ étant définie

par (7):

$$\varphi(x) = \int \sqrt{\frac{a^2}{x^2 - a^2}}\, dx.$$

Cette courbe est ainsi

$$z = a \log(x + \sqrt{x^2 - a^2}) + c';$$

c'est une chaînette qui a pour base Oz (n° **449**). Donc :

La surface de vis à filet carré est applicable sur une surface de révolution, engendrée par une chaînette tournant autour de sa base.

Si l'on écrit les équations paramétriques des deux surfaces :

$$(\Sigma_1) \quad x = r\cos\omega, \quad y = r\sin\omega, \quad z = a\omega,$$
$$(\Sigma) \quad x = u\cos\theta, \quad y = u\sin\theta, \quad z = a\log(u + \sqrt{u^2 - a^2}),$$

les relations de correspondance (6) montrent qu'au point (ω, r) de l'hélicoïde correspond le point (θ, u) de la surface de révolution défini par

$$\theta = \omega, \qquad u = \sqrt{r^2 + a^2}.$$

Donc les génératrices rectilignes ($\omega =$ const.) de l'hélicoïde s'appliquent sur les méridiens ($\theta =$ const.) de la surface de révolution, et les hélices ($r =$ const.) de l'hélicoïde s'appliquent sur les parallèles ($u =$ const.).

2° *Surface de vis à filet triangulaire.* — La courbe génératrice de cet hélicoïde, dans le plan zOx, est une droite qu'on peut supposer passer par l'origine sans diminuer la généralité, $z = \lambda x$.

Alors $f(x) = \lambda x$, $f'(x) = \lambda$, et l'on trouve, par (7),

$$\varphi(x) = \int dx \sqrt{\frac{\lambda^2 x^2 + a^2(1 - \lambda^2)}{x^2 - a^2}}.$$

On est ramené à une intégrale elliptique. Dans le cas particulier de $\lambda = 1$, c'est-à-dire si les génératrices rectilignes de l'hélicoïde font un angle de 45° avec l'axe, on a

$$\varphi(x) = \int \frac{x\, dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \sqrt{x^2 - a^2}.$$

La méridienne de la surface de révolution sur laquelle l'hélicoïde est applicable est donc $z = \sqrt{x^2 - a^2}$, c'est-à-dire $x^2 - z^2 = a^2$, hyperbole équilatère dont Oz est l'axe non transverse.

Ainsi :

La surface de vis à filet triangulaire, dont les génératrices sont à 45° sur l'axe, est applicable sur un hyperboloïde de révolution à une nappe dont la méridienne est équilatère.

Théorème de Gauss.

459. Énoncé. — Gauss a démontré le théorème suivant :

Si deux surfaces sont applicables l'une sur l'autre, le produit des rayons de courbure principaux en deux points correspondants est le même pour les deux surfaces.

Pour établir cette proposition, Gauss (*Disq. circa superf. curvas,* XI), par un calcul assez long qui ne sera pas reproduit ici, établit l'identité suivante où les notations habituelles sont conservées :

$$\begin{aligned}
&4(EG - F^2)(RT - S^2) \\
&= E\left(\frac{\partial E}{\partial v}\frac{\partial G}{\partial v} - 2\frac{\partial F}{\partial u}\frac{\partial G}{\partial v} + \overline{\frac{\partial G}{\partial u}}^2\right) \\
&\quad + G\left(\frac{\partial G}{\partial u}\frac{\partial E}{\partial u} - 2\frac{\partial F}{\partial v}\frac{\partial E}{\partial u} + \overline{\frac{\partial E}{\partial v}}^2\right) \\
&\quad + F\left(\frac{\partial E}{\partial u}\frac{\partial G}{\partial v} + \frac{\partial E}{\partial v}\frac{\partial G}{\partial u} - 2\frac{\partial E}{\partial v}\frac{\partial F}{\partial v} - 2\frac{\partial G}{\partial u}\frac{\partial F}{\partial u} + 4\frac{\partial F}{\partial u}\frac{\partial F}{\partial v}\right) \\
&\quad - 2(EG - F^2)\left(\frac{\partial^2 E}{\partial v^2} - 2\frac{\partial^2 F}{\partial u\,\partial v} + \frac{\partial^2 G}{\partial u^2}\right).
\end{aligned}$$

La vérification de cette identité n'offre aucune autre difficulté que la longueur des calculs : il faudrait remplacer E, F, G, R, S, T par leurs expressions connues (n^{os} **409** et **412**) en fonction de $\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial u}, \frac{\partial x}{\partial v}, \ldots, \frac{\partial^2 x}{\partial u^2}, \ldots$, et l'on verrait que tous les termes disparaissent.

Le produit des rayons de courbure principaux, ρ_1 et ρ_2, en un point de la surface

$$x = x(u, v), \qquad y = y(u, v), \qquad z = z(u, v),$$

est égal, d'après l'équation (9) du n° 427, qui donne ces rayons de courbure, à

$$\rho_1 \rho_2 = \frac{EG - F^2}{RT - S^2}.$$

Or, en vertu de l'identité de Gauss, $RT - S^2$ ne dépend que de E, F, G et de leurs dérivées partielles premières et secondes par rapport à u et v; on a donc

$$\rho_1 \rho_2 = \text{fonction rationnelle de } \left(E, F, G, \frac{\partial E}{\partial u}, \frac{\partial E}{\partial v}, \dots, \frac{\partial^2 G}{\partial u^2}\right).$$

En d'autres termes, si E, F, G sont les *mêmes* fonctions de u et v pour deux surfaces Σ et Σ_1, le produit $\rho_1 \rho_2$, au point u, v de la surface Σ, sera le même que le produit $\rho_1 \rho_2$ au point u, v de la surface Σ_1. Or, quand deux surfaces sont applicables l'une sur l'autre, nous avons vu (n° 455, Remarque) qu'on peut les représenter paramétriquement :

$$(\Sigma) \qquad x = x(u, v), \quad \dots,$$

$$(\Sigma_1) \qquad x = X(u, v), \quad \dots,$$

de telle sorte que E, F et G soient les *mêmes* fonctions de u, v pour les deux surfaces : le théorème de Gauss est donc établi [1].

Surfaces applicables sur le plan.

Le problème de déterminer toutes les surfaces applicables sur une surface donnée n'a encore reçu aucune solution générale : on ne sait le traiter que dans des cas particuliers, par exemple si l'une des surfaces est un plan.

On va établir que :

460. Théorème. — *Les surfaces applicables sur le plan sont les surfaces développables.*

---

[1] On donne souvent à l'inverse du produit $\rho_1 \rho_2$, des rayons de courbure en un point, le nom de *courbure totale* de la surface en ce point.

De même, on appelle *courbure moyenne* de la surface au point considéré la somme $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2}\right)$. Les surfaces dont la courbure totale ou la courbure moyenne est constante ont donné lieu à de nombreuses recherches.

En effet, pour un plan, les deux rayons de courbure principaux en chaque point sont infinis; leur produit est donc infini. Par suite, d'après le théorème de Gauss, une surface applicable sur le plan aura, en chaque point, *un* rayon de courbure principal infini.

Si cette surface est $z = f(x, y)$, l'équation aux rayons de courbure principaux, ρ, est (n° **428**) :

$$\left(pq - \frac{\rho s}{\sqrt{1+p^2+q^2}}\right)^2 - \left(1+p^2 - \frac{\rho r}{\sqrt{1+p^2+q^2}}\right)\left(1+q^2 - \frac{\rho t}{\sqrt{1+p^2+q^2}}\right) = 0;$$

et pour *qu'en chaque point* un de ces rayons soit infini, il faut et il suffit qu'on ait, *quels que soient x et y*,

$$rt - s^2 = 0.$$

Je dis que cette relation montre que la surface est développable.

On peut l'écrire, en effet,

$$\frac{\partial p}{\partial x}\frac{\partial q}{\partial y} - \frac{\partial p}{\partial y}\frac{\partial q}{\partial x} = 0, \quad \text{ou} \quad \begin{vmatrix} \dfrac{\partial p}{\partial x} & \dfrac{\partial p}{\partial y} \\ \dfrac{\partial q}{\partial x} & \dfrac{\partial q}{\partial y} \end{vmatrix} = 0,$$

c'est-à-dire que le jacobien de p et q, par rapport aux deux variables x et y, est nul; et, par suite, p et q sont liés (n° **51**) par une relation,

$$q = F(p).$$

Le plan tangent à la surface $z = f(x, y)$, au point x, y, z, a pour équation

$$Z - z = p(X - x) + q(Y - y),$$

ou

$$Z = pX + qY + (z - px - qy),$$

et l'on aura démontré que la surface est l'enveloppe d'un plan mobile dépendant d'un *seul* paramètre (c'est-à-dire est une développable), si l'on prouve que les coefficients du plan tangent, p, q, $z - px - qy$ sont fonctions de l'un d'eux, p. Or, on a déjà $q = F(p)$; tout revient donc à établir que $z - px - qy$ est fonc-

tion de p, c'est-à-dire que le jacobien

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x}(z-px-qy) & \frac{\partial}{\partial y}(z-px-qy) \\ \frac{\partial p}{\partial x} & \frac{\partial p}{\partial y} \end{vmatrix}$$

est égal à zéro.

En tenant compte de $q = F(p)$, on a

$$\frac{\partial}{\partial x}(z-px-qy) = -x\frac{\partial p}{\partial x} - F'(p)y\frac{\partial p}{\partial x} = -\frac{\partial p}{\partial x}[x+yF'(p)],$$

$$\frac{\partial}{\partial y}(z-px-qy) = -x\frac{\partial p}{\partial y} - F'(p)y\frac{\partial p}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial y}[x+yF'(p)];$$

d'où résulte immédiatement que le jacobien ci-dessus est nul. Ainsi : *Toute surface applicable sur le plan est développable.*

461. *Réciproquement,* toute développable est applicable sur le plan. En effet, considérons la développable lieu des tangentes à une courbe gauche C; nous pouvons supposer que les coordonnées x, y, z d'un point M de C sont données en fonction de l'arc OM $= \sigma$, de cette courbe, compté à partir d'un point O quelconque. On a alors, d'après le n° 401, et en désignant par k la courbure en M,

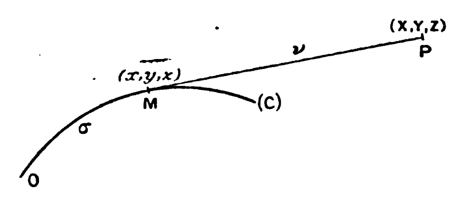
$$(1) \qquad x'^2 + y'^2 + z'^2 = 1,$$

$$(2) \qquad x'x'' + y'y'' + z'z'' = 0,$$

$$(3) \qquad x''^2 + y''^2 + z''^2 = k^2,$$

x', ..., x'', ..., étant les dérivées de x, y, z par rapport à σ.

Fig. 108.



Cela posé, soit P(X, Y, Z) (*fig.* 108) le point situé sur la tan-

gente en M, à la distance v de ce point; on a

$$\frac{X-x}{x'} = \frac{Y-y}{y'} = \frac{Z-z}{z'} = \frac{v}{\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}},$$

d'où, en tenant compte de (1),

$$(4) \quad \begin{cases} X = x + v x', \\ Y = y + v y', \\ Z = z + v z'. \end{cases}$$

Ces trois équations définissent un point quelconque X, Y, Z de la développable lieu des tangentes à la courbe C, en fonction des deux paramètres σ et v; formons, sur cette surface, l'élément ds^2.

On a

$$ds^2 = dX^2 + dY^2 + dZ^2 = [(x' + v x'')\, d\sigma + x'\, dv]^2 + \ldots,$$

et, en tenant compte de (1), (2), (3),

$$(5) \quad ds^2 = d\sigma^2(1 + v^2 k^2) + 2 d\sigma\, dv + dv^2;$$

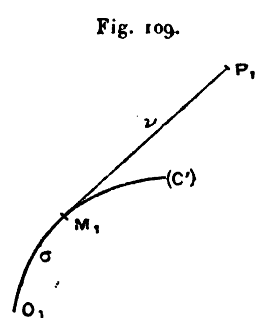
la courbure k est d'ailleurs une fonction connue de σ, $k = \varphi(\sigma)$, puisque la courbe C est donnée.

Cette expression de ds^2 est indépendante de la torsion de la courbe : si donc on considère une autre courbe, pour laquelle on ait aussi $k = \varphi(\sigma)$, et dont la torsion varie d'une manière *quelconque* avec l'arc, le ds^2, sur la développable formée par les tangentes à cette courbe, aura également l'expression (5); c'est-à-dire que les deux développables seront applicables l'une sur l'autre, le point (σ, v) de l'une correspondant au point (σ, v) de l'autre (n° 455, Remarque). Or, il y a une courbe *plane* pour laquelle $k = \varphi(\sigma)$ (n° 377); et comme la développable formée par ses tangentes n'est autre que son plan même, il en résulte bien que toute développable est applicable sur le plan.

462. Remarque. — Soit (C′) la courbe plane pour laquelle $k = \varphi(\sigma)$; désignons par O_1 (*fig.* 109) le point origine des arcs sur cette courbe. Le point P_1 qui, dans le développement sur le plan, correspond au point $P(\sigma, v)$ de la surface développable, aura aussi pour paramètres σ et v, comme on l'a observé plus

haut. En d'autres termes, pour obtenir P_1, on prendra sur (C') l'arc O_1M_1 égal à σ, c'est-à-dire à l'arc OM, et sur la tangente en M_1 on portera la longueur M_1P_1 égale à v, c'est-à-dire à MP. En particulier, les génératrices rectilignes de la développable

Fig. 109.



$(\sigma = \text{const.})$ s'appliqueront sur les tangentes de la courbe (C'); l'arête de rebroussement de $C(v = 0)$ s'appliquera sur (C').

II. — REPRÉSENTATIONS CONFORMES; CARTES GÉOGRAPHIQUES.

---

463. Représentations conformes. — Cherchons à représenter une surface Σ :

$$(\Sigma) \qquad x = x(u, v), \qquad y = y(u, v), \qquad z = z(u, v),$$

sur une surface Σ_1 :

$$(\Sigma_1) \qquad x = x_1(u', v'), \qquad \ldots,$$

avec conservation des angles.

Supposons que la correspondance entre les points des deux surfaces soit établie par les relations

$$(1) \qquad u' = f(u, v), \qquad v' = g(u, v);$$

on aura, sur la surface Σ, pour le carré ds^2 d'un élément d'arc quelconque,

$$ds^2 = E(u, v)\,du^2 + 2F(u, v)\,du\,dv + G(u, v)\,dv^2;$$

et pour le carré ds_1^2, de l'élément *correspondant* sur Σ_1 (n° 455),

$$ds_1^2 = \mathcal{E}\,du^2 + 2\mathcal{F}\,du\,dv + \mathcal{G}\,dv^2,$$

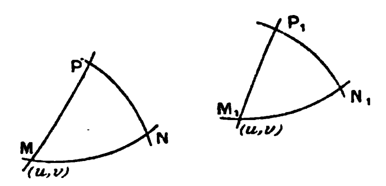
$\mathcal{E}$, $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$ étant des fonctions de forme connue de f, g, $\frac{\partial f}{\partial u}$, $\frac{\partial f}{\partial v}$, $\frac{\partial g}{\partial u}$, $\frac{\partial g}{\partial v}$, et dont l'expression a été écrite au n° 455.

Si la représentation est conforme, c'est-à-dire si elle conserve les angles, deux triangles infiniment petits quelconques correspondants, l'un sur Σ, l'autre sur Σ_1, sont semblables, de sorte qu'on a (*fig.* 110)

$$\frac{\text{MN}}{\text{M}_1\text{N}_1} = \frac{\text{MP}}{\text{M}_1\text{P}_1}.$$

Laissons fixes les points M et M_1, ainsi que les points P et P_1; cette relation montre que le rapport $\frac{\text{MN}}{\text{M}_1\text{N}_1}$ de deux arcs correspondants *quelconques*, partant l'un de M, l'autre de M_1, est fixe, c'est-

Fig. 110.



à-dire indépendant de la direction de MN; en d'autres termes, u et v étant donnés (c'est-à-dire M et M_1 étant donnés), le rapport

$$\frac{ds_1^2}{ds^2} = \frac{\mathcal{E}\,du^2 + 2\mathcal{F}\,du\,dv + \mathcal{G}\,dv^2}{\text{E}\,du^2 + 2\text{F}\,du\,dv + \text{G}\,dv^2}$$

est indépendant du rapport $\frac{du}{dv}$, ce qui exige évidemment qu'on ait, quels que soient u et v,

$$(2) \qquad \frac{\mathcal{E}}{\text{E}} = \frac{\mathcal{F}}{\text{F}} = \frac{\mathcal{G}}{\text{G}}.$$

Réciproquement, si les relations (2) sont satisfaites, quels que soient u, v, la représentation (1) conserve les angles. En effet, les relations (2) expriment que le rapport de deux arcs infiniment petits correspondants, partant l'un d'un point M, l'autre du point correspondant M_1, est indépendant de la direction du premier

arc autour du point M; on a donc, autour de M,

$$\frac{MN}{M_1N_1} = \frac{MP}{M_1P_1};$$

de même, autour de N,

$$\frac{NM}{N_1M_1} = \frac{NP}{N_1P_1},$$

ce qui prouve que les deux triangles MNP et $M_1N_1P_1$ sont semblables : leurs angles sont donc égaux. C. Q. F. D.

On a donc finalement les *deux* relations (2) entre les *deux* fonctions inconnues f et g (et leurs dérivées), ce qui permettra de déterminer ces fonctions; le problème est donc possible, c'est-à-dire qu'on peut toujours faire la représentation conforme d'une surface sur une autre.

464. Cartes géographiques. — Supposons que la surface Σ_1 soit un plan, et soient u' et v' les coordonnées cartésiennes rectangulaires du point de ce plan qui correspond au point u, v de Σ; u', v' sont des fonctions inconnues de u, v qu'il s'agit de déterminer. On a

$$ds_1^2 = du'^2 + dv'^2,$$

et la représentation conservera les angles si le rapport $ds^2 : ds_1^2$, ou

$$\frac{E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2}{du'^2 + dv'^2},$$

est une fonction de u et v, indépendante du rapport $\frac{du}{dv}$. Soit $\lambda(u, v)$ la valeur de ce rapport; il vient

$$(3) \qquad E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2 = \lambda(du'^2 + dv'^2).$$

Voici comment on peut trouver une solution particulière du problème, c'est-à-dire déterminer des fonctions u', v', λ, de u et v, vérifiant identiquement cette relation.

Décomposons le trinome $E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2$ en deux facteurs, qui sont nécessairement imaginaires conjugués, car le trinome, qui représente un élément d'arc, ne peut s'annuler pour

aucune valeur réelle de $\frac{du}{dv}$:

$$(4) \qquad E\,du^2 + \ldots = (\alpha\,du + \beta\,dv)(\alpha_1\,du + \beta_1\,dv);$$

α et β sont des fonctions de u, v, et α_1, β_1 sont imaginaires conjugués de α, β. Or on démontrera, dans le Cours de seconde année, qu'étant donnée une expression

$$\alpha(u, v)\,du + \beta(u, v)\,dv,$$

on peut toujours trouver un facteur, $\mu(u, v)$, tel que le produit

$$\mu(\alpha\,du + \beta\,dv)$$

soit la différentielle exacte d'une fonction $\varphi(u, v)$. On a ainsi

$$(5) \quad \mu(\alpha\,du + \beta\,dv) = d\varphi, \qquad \text{et de même} \qquad \mu_1(\alpha_1\,du + \beta_1\,dv) = d\varphi_1,$$

μ_1 et φ_1 étant imaginaires conjugués de μ et φ. L'équation (3), si l'on tient compte de (4) et (5), s'écrit alors

$$d\varphi\,d\varphi_1 = \mu\mu_1\lambda(du'^2 + dv'^2),$$

et l'on y satisfera identiquement en posant :

$$du' + i\,dv' = d\varphi,$$
$$du' - i\,dv' = d\varphi_1,$$

d'où

$$u' + iv' = \varphi,$$
$$u' - iv' = \varphi_1,$$

et

$$\lambda = \frac{1}{\mu\mu_1}.$$

On a ainsi une détermination *particulière*,

$$(6) \qquad u' = \frac{1}{2}(\varphi + \varphi_1), \qquad v' = \frac{1}{2i}(\varphi - \varphi_1),$$

des fonctions inconnues u' et v', c'est-à-dire une représentation conforme, ou *carte géographique*, de la surface sur le plan ; au point (u, v) de la surface correspond, sur le plan, le point dont les coordonnées rectangulaires sont les valeurs (6) de u' et v'.

465. Il y a une infinité de manières de représenter ainsi une surface sur un plan.

Soient, en effet, une première carte où le point M de la surface ait pour correspondant le point m du plan, et une seconde carte où il ait pour correspondant le point m_1 ; l'angle de deux courbes partant de M sur la surface est égal à celui des couples de courbes correspondantes partant respectivement de m et m_1 sur le plan; il en résulte que la transformation plane, qui fait correspondre le point m_1 au point m, conserve les angles. En d'autres termes, *étant donnée une carte particulière* de la surface sur le plan, et l'on sait en trouver une d'après le numéro précédent, *on obtiendra toutes les autres cartes* en faisant subir à la première toutes les transformations planes possibles qui n'altèrent pas les angles.

466. Transformations isogonales du plan. — Le problème revient donc à déterminer toutes les *transformations conformes du plan en lui-même.*

Soient X et Y les coordonnées du point qui, dans une de ces transformations, correspond au point x, y,

$$X = P(x, y), \qquad Y = Q(x, y).$$

Pour que les angles soient conservés, il faut et il suffit (n° 463) que le rapport

$$\frac{dX^2 + dY^2}{dx^2 + dy^2} = \frac{\left(\frac{\partial P}{\partial x}dx + \frac{\partial P}{\partial y}dy\right)^2 + \left(\frac{\partial Q}{\partial x}dx + \frac{\partial Q}{\partial y}dy\right)^2}{dx^2 + dy^2}$$

soit indépendant de $\frac{dy}{dx}$, ce qui donne les conditions

$$(7) \qquad \begin{cases} \left(\frac{\partial P}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial Q}{\partial x}\right)^2 = \left(\frac{\partial P}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial Q}{\partial y}\right)^2, \\ \frac{\partial P}{\partial x}\frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{\partial Q}{\partial x}\frac{\partial Q}{\partial y}. \end{cases}$$

On peut écrire

$$\frac{\left(\frac{\partial P}{\partial x}\right)}{\left(\frac{\partial Q}{\partial y}\right)} = \frac{\left(\frac{\partial Q}{\partial x}\right)}{-\left(\frac{\partial P}{\partial y}\right)} = \pm\frac{\sqrt{\left(\frac{\partial P}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial Q}{\partial x}\right)^2}}{\sqrt{\left(\frac{\partial Q}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial P}{\partial y}\right)^2}},$$

le dernier membre est égal à ± 1, d'après (7); on a donc, ε repré-

sentant ± 1 :

$$(8)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial P}{\partial x} = \varepsilon \dfrac{\partial Q}{\partial y}, \\ \dfrac{\partial P}{\partial y} = -\varepsilon \dfrac{\partial Q}{\partial x}. \end{cases}$$

Ces relations, si $\varepsilon = +1$, sont précisément celles qui expriment (n° **155**) que $P + iQ$ est une fonction de $x + iy$; et si $\varepsilon = -1$, elles expriment que $P - iQ$ est fonction de $x + iy$.

Donc, à toute fonction $P + Qi$ d'une variable imaginaire $x + yi$ correspond une transformation plane

$$X = P(x, y), \qquad Y = \pm Q(x, y)$$

qui conserve les angles; et réciproquement, si cette transformation conserve les angles, $P + Qi$ (ou $P - Qi$) est une fonction de $x + yi$.

Le problème des transformations conformes du plan en lui-même est donc le même que celui de la détermination de toutes les fonctions d'une variable imaginaire.

Exemple. — La transformation par rayons vecteurs réciproques, le pôle étant l'origine et la puissance étant k^2, est définie par les relations

$$X = k^2 \frac{x}{x^2 + y^2}, \qquad Y = k^2 \frac{y}{x^2 + y^2}.$$

On sait, par la Géométrie élémentaire, qu'elle conserve les angles; une des quantités $X \pm iY$ doit donc être une fonction de $x + iy$. On a, en effet,

$$X - iY = k^2 \frac{x - iy}{x^2 + y^2} = k^2 \frac{1}{x + yi}.$$

Exemples.

467. Sphère. — Si la surface Σ est une sphère (de rayon 1), on a (n° **416**, 2°) :

$$x = \sin\theta \cos\psi, \qquad y = \sin\theta \sin\psi, \qquad z = \cos\theta,$$

$$ds^2 = d\theta^2 + \sin^2\theta \, d\psi^2.$$

Pour faire la *carte géographique* de la sphère sur un plan, d'après la méthode du n° **464**, décomposons $d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\psi^2$ en deux facteurs :

$$d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\psi^2 = (d\theta + i\sin\theta\, d\psi)(d\theta - i\sin\theta\, d\psi).$$

Il faut maintenant trouver un facteur μ, tel que la quantité

$$\mu(d\theta + i\sin\theta\, d\psi)$$

soit, la différentielle exacte d'une fonction $\varphi(\theta, \psi)$: on aperçoit de suite la solution $\mu = \frac{1}{\sin\theta}$, car

$$\frac{1}{\sin\theta}(d\theta + i\sin\theta\, d\psi) = d\left(i\psi + \int\frac{d\theta}{\sin\theta}\right).$$

De même

$$\frac{1}{\sin\theta}(d\theta - i\sin\theta\, d\psi) = d\left(-i\psi + \int\frac{d\theta}{\sin\theta}\right),$$

et l'on aura une carte géographique en faisant correspondre au point θ, ψ de la sphère le point u', v' du plan tel que

$$u' + iv' = i\psi + \int\frac{d\theta}{\sin\theta},$$
$$u' - iv' = -i\psi + \int\frac{d\theta}{\sin\theta},$$

c'est-à-dire, en remplaçant l'intégrale par sa valeur (n° **229**),

$$(9)\qquad \begin{cases} u' = \displaystyle\int\frac{d\theta}{\sin\theta} = \log\operatorname{tang}\frac{\theta}{2}, \\ v' = \psi. \end{cases}$$

Dans cette représentation, les méridiens ($\psi =$ const.) sont représentés par des parallèles à l'axe des u', et les parallèles ($\theta =$ const.) par des parallèles à l'axe des v'; c'est le système de carte de *Mercator*.

Application. — Cherchons l'équation des courbes, dites *loxodromies,* qui coupent tous les méridiens sous un même angle donné, V. Sur la carte, ces courbes ont pour image les droites

$$v'\cot V = u' + h,$$

h étant une constante arbitraire; donc, sur la sphère, leur équation sera, en vertu de (9),

$$\psi \cot V - h = \log \operatorname{tang} \frac{\theta}{2}$$

ou

$$\operatorname{tang} \frac{\theta}{2} = e^{-h} e^{\psi \cot V},$$

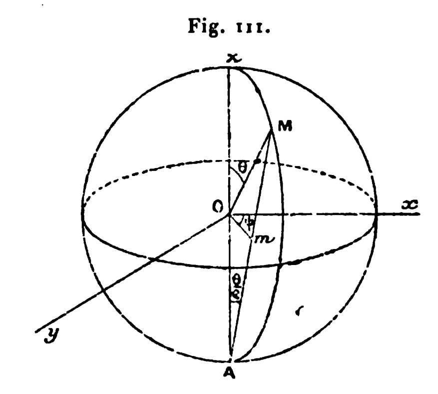
c'est-à-dire

$$\operatorname{tang} \frac{\theta}{2} = \lambda e^{\psi \cot V},$$

λ étant une constante quelconque (n° **417**).

468. On peut déduire de ce qui précède, par la méthode des nos **465** et **466**, tous les autres systèmes de cartes conservant les

Fig. 111.



angles : il suffira de faire correspondre au point θ, ψ de la sphère le point X, Y du plan, défini par

$$X = P(u', v'), \qquad Y = Q(u', v'),$$

$P \pm iQ$ étant une fonction de $u' + v'i$, et u', v' étant remplacés par leurs valeurs (9).

Par exemple, prenons

$$P + iQ = e^{u'+v'i} = e^{u'}(\cos v' + i \sin v'),$$

c'est-à-dire

$$P = e^{u'} \cos v'; \qquad Q = e^{u'} \sin v';$$

au point (θ, ψ) de la sphère correspond, si l'on remplace u', v' par

leurs valeurs (9), le point du plan

$$X = \text{tang}\frac{\theta}{2}\cos\psi, \qquad Y = \text{tang}\frac{\theta}{2}\sin\psi.$$

C'est la *projection de Ptolémée,* ou stéréographique, qui fait correspondre, à un point M de la sphère, le point m où la droite qui joint M à l'un des pôles, A, perce le plan de l'équateur (*fig.* 111).

On a, en effet,

$$\widehat{mox} = \psi, \qquad \widehat{MAO} = \frac{\theta}{2},$$

$$Om = OA.\text{tang}\frac{\theta}{2} = \text{tang}\frac{\theta}{2},$$

d'où, pour les coordonnées X et Y de m,

$$X = Om\cos\psi = \text{tang}\frac{\theta}{2}\cos\psi,$$

$$Y = Om\sin\psi = \text{tang}\frac{\theta}{2}\sin\psi. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

469. **Surfaces de révolution.** — On a trouvé (n° 416) pour le ds^2 sur la surface de révolution décrite par la courbe $z = f(x)$, du plan des zx, tournant autour de Oz,

$$ds^2 = r^2 d\omega^2 + [1 + f'^2(r)]\,dr^2.$$

Décomposons en facteurs :

$$r^2 d\omega^2 + [1 + f'^2(r)]\,dr^2 = \left(ir\,d\omega + \sqrt{1+f'^2}\,dr\right)\left(-ir\,d\omega + \sqrt{1+f'^2}\,dr\right).$$

Un facteur μ, tel que $\mu\left(ir\,d\omega + \sqrt{1+f'^2}\,dr\right)$ soit une différentielle exacte, est évidemment $\frac{1}{r}$; car

$$\frac{1}{r}\left[ir\,d\omega + \sqrt{1+f'^2}\,dr\right] = d\left[i\omega + \int\frac{dr}{r}\sqrt{1+f'^2(r)}\right].$$

On aura donc une carte géographique en faisant correspondre au point (r, ω) de la surface le point u', v' du plan, défini par

$$u' + iv' = \quad i\omega + \int\frac{dr}{r}\sqrt{1+f'^2(r)},$$

$$u' - iv' = -i\omega + \int\frac{dr}{r}\sqrt{1+f'^2(r)},$$

c'est-à-dire

$$(10) \qquad u' = \int \frac{dr}{r}\sqrt{1+f'^2(r)}, \qquad v' = \omega.$$

Les méridiens ($\omega = \text{const.}$) sont représentés par des droites parallèles à un des axes de coordonnées; les parallèles ($r = \text{const.}$) par des droites parallèles à l'autre axe.

Les courbes qui coupent tous les méridiens de la surface de révolution sous un même angle V ont pour image, sur le plan, les droites

$$v' \cot V = u' + h;$$

sur la surface, on obtiendra donc leur équation en remplaçant u' et v' par leurs valeurs (10) :

$$\omega \cot V = \int \frac{dr}{r}\sqrt{1+f'^2(r)} + h.$$

470. Ellipsoïde. — Soit en général une surface, sur laquelle, en fonction de deux paramètres u et v et de leurs différentielles du et dv, le ds^2 ait pour expression :

$$ds^2 = \varphi(u, v)(U\,du^2 + V\,dv^2),$$

U étant une fonction de u seul, et V de v seul.

Si l'on pose

$$(11) \qquad u' = \int \sqrt{U}\,du; \qquad v' = \int \sqrt{V}\,dv,$$

on aura

$$du'^2 + dv'^2 = U\,du^2 + V\,dv^2,$$

et le quotient

$$\frac{ds^2}{du'^2 + dv'^2}, \qquad \text{c'est-à-dire} \qquad \varphi(u, v),$$

sera indépendant de du et dv : les équations (11) donneront donc (n° **463**) une représentation conforme de la surface sur le plan des $u'v'$. L'ellipsoïde rentre dans cette catégorie de surfaces, en raison de l'expression de son ds^2 en coordonnées elliptiques (n° **447**).

FIN DU TOME PREMIER.

PARIS. — IMPRIMERIE GAUTHIER-VILLARS,
31198 Quai des Grands-Augustins, 55.

31198 Paris. — Imprimerie GAUTHIER-VILLARS, quai des Grands-Augustins, 55.

